

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES



TESIS DOCTORAL

Análisis multicriterio del problema de reaseguro óptimo

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Alina Fernanda Aguilar Pradal

Director

Antonio José Heras Martínez

Madrid, 2018



**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID**

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y

EMPRESARIALES

**ANÁLISIS MULTICRITERIO DEL
PROBLEMA DE REASEGURO ÓPTIMO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
**DOCTOR EN CIENCIAS ECONÓMICAS
Y EMPRESARIALES**

P R E S E N T A

ALINA FERNANDA AGUILAR PRADAL

Director:
DR. ANTONIO JOSÉ HERAS MARTÍNEZ

2017

A ti Abuela, desafortunadamente hace unos meses te nos fuiste y no pude darte la noticia de que esta tesis está terminada. Sigues siendo uno de mis grandes ejemplos a seguir, y sé que donde quiera que estés me cuidas y estás orgullosa de mí. Te amo y gracias por todo.

Lo que he hecho y logrado hasta ahora es por tenerte en mi vida *marmota*, porque a pesar de la distancia siempre has estado conmigo, porque cuando sentía que ya no podía estabas ahí para alentarme, por leer y revisar a conciencia este trabajo a pesar de no ser un tema de tu campo, porque conforme pasan los años me sigue sorprendiendo el mujerón que eres, simplemente GRACIAS por ser mi madre y un ejemplo de persona excepcional. TE AMO

Igualmente a mis hermanos, Emilio y Bruno, gracias hermanote por siempre darme lecciones de cómo terminar esta tesis y decirme “Ricci, tú puedes”. Los quiero demasiado y me llena de orgullo completar con esta tesis un logro más para nuestra hermandad triangular. A mi familia gracias por siempre estar al pendiente de mí, en especial gracias Alex B. por tu ayuda en el final.

No puedo dejar de agradecer el apoyo económico recibido del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, sin el cual no podría haber llevado a cabo mis estudios de posgrado. A mi director de tesis, gracias Prof. Heras, su confianza y dedicación desde el primer momento, hizo posible que este trabajo haya llegado a su fin. A Víctor Pérez y Alberto Rodríguez, su apoyo informático posibilitó la conclusión de esta tesis. A Ma. Victoria Rivas, Arturo Lozano, Javier Gonzalvez y Dolores Armenta sin su apoyo académico llevar a cabo esta tesis habría sido un trabajo lleno de obstáculos.

A todas y todos mis amigas y amigos que aguantaron mi frase célebre: “no puedo, tengo que hacer mi tesis”. En especial a Silvia, gracias Boba, por estar todos los días preocupada por mí. A Tata, gracias por ser mi conciencia, regañarme, apoyarme y quererme. A Dany, Lara y Kristina gracias, porque aunque en estos años ya no estamos en la misma ciudad estuvieron al pendiente de cómo iba con este trabajo. JF gracias por atreverte a tener una relación a pesar de que esta tesis no me dejaba tiempo para una. Padre Chuchín gracias por ser mi amigo, sin ti cuidándome no podría seguir concluyendo metas.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE CUADROS	3
ÍNDICE DE FIGURAS	4
RESUMEN	5
ABSTRACT	6
INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO I. MERCADO DE REASEGURO	10
CAPÍTULO II. INDICADORES FINANCIEROS EN EL SECTOR SEGUROS	20
2.1 Estado de Resultados	20
2.2 Balance General	24
CAPÍTULO III. MEDIDAS DE RIESGO APLICADAS AL PROBLEMA DEL REASEGURO ÓPTIMO	36
3.1 Principios de cálculo de primas	44
3.2 Problema del Reaseguro Óptimo	56
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS MULTICRITERIO	67
4.1 Robustez	68
4.2 Métodos multicriterio	69
4.2.1 Formulación	70
4.2.2 Tipos	71
CAPÍTULO V. APLICACIÓN DEL MÉTODO MULTICRITERIO ELECTRE IS AL PROBLEMA DEL REASEGURO ÓPTIMO	108
CONCLUSIONES	123
BIBLIOGRAFÍA Y RECURSOS DE INTERNET	125

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro I.1 Posición de la cedente y el reasegurador	13
Cuadro I.2 Tipos de contratos de Reaseguro	13
Cuadro II.1 Estado de Resultados	23
Cuadro II.2 Ratios de Liquidez	26
Cuadro II.3 Ratios de Solvencia y Apalancamiento	28
Cuadro II.4 Ratios de Estructura de Costes	29
Cuadro II.5 Ratios de Reaseguro	30
Cuadro II.6 Ratios de Rentabilidad	32
Cuadro II.7 Ratios de Actividad	33
Cuadro II.8 Ratios de Crecimiento y Participación	34
Cuadro II.9 Ratios de Eficiencia Productiva	35
Cuadro IV.1 Tipos de Métodos Multicriterio	72
Cuadro IV.2 Escala de Medidas de Saaty	77
Cuadro IV.3 Escala de Medidas de Saaty en el método Ponderación Aditiva Simple	85
Cuadro IV.4 Tipos de Criterios Generalizados	90
Cuadro V.1 Perfil bruto de la compañía tipo	110
Cuadro V.2 Ejemplo de criterios	111
Cuadro V.3 Matriz de decisión multicriterio	112

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura III.1 VaR	40
Figura IV.1 Proceso Analítico Jerárquico	76
Figura IV.2 Razonamiento Basado en Casos	79
Figura IV.3 Método ELECTRE IS	100
Figura V.1 Función de densidad de la Siniestralidad	108
Figura V.2 Función de distribución de la Siniestralidad	109
Figura V.3 Función de densidad de la Ganancia	109
Figura V.4 Función de distribución de la Ganancia	110
Figura V.5 Matriz de concordancia (caso 1)	114
Figura V.6 Matriz de discordancia (caso 1)	114
Figura V.7 Matriz de robustez (caso 1)	114
Figura V.8 Matriz de superación (caso 1)	114
Figura V.9 Grafo de superación (caso 1)	115
Figura V.10 Grafo de superación modificado (caso 1)	115
Figura V.11 Grafo resultante (caso 1)	116
Figura V.12 Matriz de concordancia (caso 2)	116
Figura V.13 Matriz de discordancia (caso 2)	117
Figura V.14 Matriz de robustez (caso 2)	117
Figura V.15 Matriz de superación (caso 2)	117
Figura V.16 Grafo de superación (caso 2)	118
Figura V.17 Grafo de superación modificado (caso 2)	118
Figura V.18 Grafo resultante (caso 2)	119
Figura V.19 Matriz de concordancia (caso 3)	119
Figura V.20 Matriz de discordancia (caso 3)	120
Figura V.21 Matriz de robustez (caso 3)	120
Figura V.22 Matriz de superación (caso 3)	120
Figura V.23 Grafo de superación (caso 3)	121
Figura V.24 Grafo de superación modificado (caso 3)	121
Figura V.25 Grafo resultante (caso 3)	122

RESUMEN

El problema del reaseguro hoy en día es que muchos de sus productos sólo toman en cuenta ciertas necesidades de las compañías de seguros, dejando de lado otros criterios importantes o evaluándolos por separado y no en conjunto, lo cual deriva en gastos innecesarios. Por ejemplo, que sólo se tenga en cuenta el aumento en las ganancias que espera tener la aseguradora, pero no la disminución en su capital al contratar determinado contrato de reaseguro.

La propuesta del presente trabajo consiste en proporcionar a la cedente, que es como se le conoce a una compañía de seguros en el mercado reasegurador, una herramienta para elegir cierto producto de reaseguro, cuando se encuentre ante el problema de toma de decisiones.

El primer paso que se debe tener en cuenta son las políticas de selección de la cedente, para ver cuáles de los diferentes productos de reaseguro que ofrece el mercado se adecuan a éstas. En este estudio se asumieron de acuerdo a la información que se tuvo de una compañía de seguros tipo.

A partir del conjunto de productos de reaseguro viables para la cedente, se observa cómo variarían, con cada uno de estos, los criterios más importantes de la aseguradora, y esta variación se analiza a través de ratios financieros y medidas del riesgo. Una vez que se obtiene esta información, se realiza un análisis multicriterio que considera simultáneamente varios elementos sin perder la integridad de cada uno de ellos, en lugar de un único objetivo como se haría en un análisis lineal. Dicho análisis se lleva a cabo mediante el método ELECTRE IS, a través de su software del mismo nombre.

El resultado obtenido permite a la cedente disponer de una gama de sus mejores opciones o incluso la mejor opción de reaseguro a contratar, lo que se reflejaría en una mayor estabilidad y solvencia al momento de hacer frente a las obligaciones con sus asegurados.

ABSTRACT

The problem with reinsurance nowadays is that many of its products take into account only certain needs of the insurance companies, leaving aside other important criteria or evaluating them separately rather than collectively, resulting in unnecessary costs. For example, taking only into account the increase in profits that the insurer expects to have, but not the decrease in its capital when contracting a certain reinsurance contract will result in unforeseen budget losses.

The purpose of this paper is to provide the ceding company, which is how an insurance company is known in the reinsurance market, with a tool to make better decisions about choosing a certain reinsurance product, when faced with the issue of decision making.

The first step that must be taken into account is the selection policies of the ceding company, to see which of the different reinsurance products offered by the market are a good fit for them. In this study, these policies were based on the information gathered from a common insurance company.

Based on the set of viable reinsurance products available for the ceding company, it is possible to observe how the most important criteria of the insurance company would vary, with each one of the products, and this variation is analyzed through financial ratios and risk measures. Once this information is obtained, instead of a single objective as it would be done in a linear analysis, a multicriteria analysis is performed, which simultaneously considers several elements without losing the integrity of each one. This analysis is carried out using the ELECTRE IS method, through its software of the same name.

The result obtained using the ELECTRE IS method allows the ceding company to have a comprehensive range of its best options or even the best option of reinsurance to be contracted, which would be reflected in a greater stability and solvency when facing the obligations with the insured.

INTRODUCCIÓN

El reaseguro es una modalidad de seguro que se produce cuando el asegurador que ha aceptado un riesgo que sobrepasa de su capacidad, cede el exceso a otro asegurador; en términos sencillos, el reaseguro se define como "el seguro del seguro". Es decir, se trata de un contrato que suscribe la compañía de seguros (aseguradora o cedente) con otra compañía (en este caso, la reaseguradora), para que asuma parte (o la totalidad) del coste de un posible siniestro. Es la manera que tienen las entidades aseguradoras de asumir riesgos muy elevados.

Por ello, el reaseguro viene a superponerse a la protección de los riesgos otorgando mayor estabilidad y solvencia al asegurador, que es quien, frente a sus asegurados, tiene la obligación de asumir el coste de las reclamaciones por siniestros cubiertos por la póliza.

De cualquier forma, el contrato de reaseguro, no afecta al asegurado, que puede, en su caso, exigir el total de la indemnización a su asegurador. Así mismo, el asegurado no puede exigir directamente al reasegurador indemnizaciones ni prestaciones.

En definitiva, y en términos más técnicos, con el reaseguro se homogenizan los valores asegurados y se limitan las responsabilidades asumidas, con lo que se permite el control de la frecuencia siniestral (probabilidad de ocurrencia), de la intensidad del siniestro (alcance) y de su importe (cuantía), todo lo cual favorece una mayor capacidad y oferta de seguros para asumir riesgos.

El reaseguro tiene las siguientes características:

- *Consensual*, es decir, no es necesario que se formalice por escrito.
- *Bilateral*, produce obligaciones para ambas partes, el reasegurado se obliga al pago de una prima y el reasegurador a satisfacer la indemnización prevista en el contrato en caso de producirse el siniestro.
- *Oneroso*, puesto que las partes esperan contraprestaciones de la otra.
- *Aleatorio*, en cuanto a que existe incertidumbre sobre si se producirá el siniestro y cuándo se producirá éste.
- *De ejecución continuada*, de tracto sucesivo, puesto que en su origen está la satisfacción de la seguridad del reasegurado durante la vigencia del contrato, independientemente que las indemnizaciones se hagan efectivas de una sola vez o que las primas se calculen de forma única y global, aunque los pagos sean fraccionados.
- *Único*, aunque se incluyan riesgos no existentes en el momento de concertarse el contrato. Es en el *obligatorio* (modalidad de contrato de reaseguro), donde se establece que el reasegurador asume todos los riesgos que ya tenga el reasegurado y los que vaya aceptando en el futuro.
- *De indemnización*, cualquiera que sea el ramo del reasegurado, la obligación del reasegurador se materializa en el pago de una suma de dinero.

Cada actor del contrato de reaseguro tiene las siguientes obligaciones:

- *Reasegurado:*
 - Cuantía y cálculo de la prima.
 - Momento del pago.
 - Forma de pagar la prima.
- *Reasegurador:*
 - Pago de la indemnización pactada.
 - Cuantía de la prestación del reasegurador.
 - Pago de comisión.
 - Participación en beneficios.
 - Constitución de reservas.

Teniendo como base su experiencia, el sector reasegurador proporciona al del seguro información que es de gran utilidad para las cedentes así como para otras compañías de reaseguro, como por ejemplo:

- Asesorar sobre la prevención de riesgos, así tanto asegurados o reasegurados pueden conseguir reducir el número y la cuantía de los siniestros.
- Información sobre determinados riesgos debido a lo mucho o poco que se den en cada país ya que tiene experiencia en ámbitos internacionales.
- Para tratar determinados siniestros o seguro especiales el reasegurador aporta a sus técnicos y especialistas, con los cuales el reasegurado no cuenta. Asimismo su carácter internacional, conlleva al reasegurador a hacer las gestiones necesarias de forma más rápida y económica cuando el reasegurado no tiene presencia en el lugar del siniestro.
- Sobre el cálculo de primas, en especial en los grandes riesgos.
- Proporciona ideas y programas para ayudar a mejorar la administración del asegurador.

Las compañías de seguros enfrentan problemas de decisión importantes, con varios objetivos diferentes que no se pueden alcanzar todos juntos, porque la mejora de uno de ellos por lo general implica el empeoramiento de alguno de los otros. Algunos de estos problemas se ocupan de la disyuntiva clásica entre riesgo y beneficio, otros problemas implican objetivos más sofisticados, como el grado de equidad de las primas de seguros.

En este trabajo nos ocuparemos del problema de *reaseguro óptimo*. Este problema consiste en la selección del tipo y/o cantidad apropiada de reaseguro. Las preguntas a responder son: ¿cómo reasegurar? o ¿cuánto reasegurar? Para dar solución a estas preguntas, existen dos maneras, una es determinar el punto de retención óptimo y la otra, que es la que nosotros analizaremos, evaluar diferentes tipos de contrato de reaseguro ofertados en el mercado actual.

Para llevar a cabo esta evaluación, se ha utilizado el Análisis Multicriterio, tomando como *criterios* diversas medidas del riesgo, que fueron estimadas en cada *alternativa*, las cuales en nuestro tema de estudio representan a las opciones de reaseguro.

La estructura del presente trabajo es: primeramente la evolución del mercado de reaseguro hasta los productos actuales en el mercado asegurador. Posteriormente de manera teórica las cuentas contables de seguros y cómo el reaseguro influye en los indicadores de la cedente. En el tercer capítulo se muestran las medidas del riesgo que se dan en el problema de reaseguro óptimo. Dentro del cuarto capítulo se define el análisis multicriterio y los métodos dentro de éste que actualmente se utilizan. Para finalmente ver de manera práctica la aplicación del método ELECTRE IS, a un problema tipo, como metodología de apoyo para la toma de decisiones a la que se enfrenta la cedente al elegir un producto de reaseguro, dentro de sus políticas de selección.

CAPÍTULO I. MERCADO DE REASEGURO

El reaseguro tiene su origen en el transporte marítimo, ya que representaba un gran riesgo tanto por las travesías como por el valor de las mercancías y/o buques. Pero dado que para que formalmente apareciera un contrato de reaseguro se tuvo que dar antes uno de seguro, tuvieron que aparecer primero las compañías de seguros y esto se da hasta el siglo XVII.

Posteriormente empezó a surgir la necesidad de reasegurar otros ramos, tal fue el caso de:

- 1813, primer contrato de reaseguro de incendios conocido, entre la Eagle Fire Insurance Company de Nueva York y la Union Insurance.
- 1854, en Trieste se da el contrato de reaseguro más antiguo conocido sobre granizo, entre la Magdeburger y la Reunioni Adriatica.
- 1844, se extienden los primeros contratos de reaseguro de vida en Inglaterra.
- 1888, se inicia por dos compañías escocesas el primer contrato de reaseguro de accidentes.

El *reaseguro* es un mecanismo que las aseguradoras (cedentes) utilizan para transferir parte o la totalidad de sus riesgos a las compañías de reaseguro, esto es, un seguro para las aseguradoras donde la reaseguradora tiene obligaciones contractuales sólo con las aseguradoras directas, no con los asegurados.

En virtud de un contrato de seguro, la aseguradora acepta pagar la pérdida del asegurado, (o parte de ella), en la ocurrencia de un evento incierto específico, y el asegurado acepta pagar la prima. Lo mismo ocurre en los contratos de reaseguro; podría decirse que el reaseguro es un *traje hecho a la medida* para las compañías de seguros, es decir, tiene muchas características del contrato de seguro (interés asegurable, máxima de buena fe, indemnización, solidaridad de intereses, transferencia de riesgo, principio de continuidad, arbitraje, solvencia); pero no es un contrato tipo, por lo que queda sujeto a la legislación mercantil, a lo convenido por las partes y a los usos y costumbres internacionales en operaciones de reaseguro.

Dado lo anterior se podría entender que el contrato de reaseguro se formula por escrito y se firma tanto por la cedente como por la reaseguradora, pero en muchos casos basta sólo con el acuerdo de manera verbal por ambas partes.

Entre las diversas estadísticas que las compañías de seguros utilizan para calcular las primas que cobran a sus asegurados, existen las *estadísticas provenientes de los reaseguradores*, las cuales dado su carácter internacional, significan para las cedentes un aporte de información de distintos países, que les permite comparar contra su información local.

Esta información estadística se vuelve relevante en el caso de los siniestros grandes o catastróficos, ya que la reaseguradora internacional tendrá información y experiencia histórica, suficiente para medir el riesgo que podría sufrir la cedente.

Dado que las compañías de seguros deben tener ciertas reservas de capital (solvencia) para en cualquier momento hacer frente a los siniestros que sufran sus asegurados, éstas tienen dos posibilidades: aumentar su capital o aplicar el reaseguro. Como la primera opción no supone ser una buena solución a mediano plazo entonces es cuando el reaseguro desempeña un papel importante como aportador de fondos, reduciendo también así el riesgo técnico.

El objetivo principal del reaseguro es proteger la solvencia de la aseguradora, reduciendo al mínimo la probabilidad de ruina; con lo cual la aseguradora tiene la necesidad de acceder a un capital adicional de modo que ésta pueda asumir mayores riesgos y por lo tanto, tener más clientes. Algunos ejemplos típicos de situaciones en las que se requiere la protección de la solvencia incluyen: reclamaciones muy grandes (por ejemplo, en los casos de grandes desastres provocados por el hombre, tales como un accidente de avión, etcétera), un gran número de reclamaciones de pólizas afectadas por el mismo evento (por ejemplo, en el caso de desastres naturales tales como terremotos, huracanes, inundaciones, entre otros), cambios repentinos en el flujo de primas (por ejemplo, debido a la inflación) o en el número de asegurados, etcétera.

Entrando ya en el sector del reaseguro veamos los actores que intervienen en este sector:

Los aseguradores directos, son los principales clientes de las reaseguradoras, su capacidad de compra depende mucho del mercado de seguros de cada país; por lo que para que el mercado de reaseguro tenga éxito es preferible tener el del seguro repartido en varias compañías de reciente creación y por lo tanto pequeñas.

Los reaseguradores directos, actualmente el reaseguro mundial tiene a la cabeza a la compañía alemana Munich Re (Münchener Rück) fundada en Múnich en 1880, y a la suiza Swiss Re (Swiss Reinsurance) originaria de Zúrich desde 1863, entre ellas dos concentran el mayor volumen del negocio. Además de las entidades profesionales un gran número de compañías de seguro directo están actuando también como reaseguradoras.

Los retrocesionarios, los cuales se dan cuando un reasegurador cede cierto reaseguro a otro asegurador o reasegurador, es decir, se reasegura para así quitarse una parte de los riesgos asumidos y poder equilibrar sus resultados. Esto ayuda a las cedentes a no tener que llevar a cabo la tarea de buscar cómo distribuir internacionalmente sus grandes riesgos.

Los intermediarios o corredores de seguros (brockers), se utilizan cuando una reaseguradora internacional quiere establecer relaciones con ciertas aseguradoras o entidades en un determinado país en el cual no tiene presencia física. El broker gestiona las mejores condiciones de reaseguro y/o asesora a la cedente, ya que son los que tienen más información sobre mercados internacionales, además que pueden

actuar como agentes y muchas veces están autorizados para negociar en nombre de la cedente.

Los pools, se dan cuando un cierto número de entidades que operan en un mercado concreto acuerdan cooperar para obtener cierto equilibrio en los resultados de sus negocios y así poder hacer frente a grandes riesgos o a riesgos generalizados. El pool de reaseguro tiene como principal característica que su póliza es emitida por uno de sus miembros y se distribuye entre los restantes de acuerdo a las proporciones acordadas dentro del pool, pero para el asegurado permanece desconocido.

Las compañías de reaseguro cautivas, éstas son fundadas por grandes compañías industriales, generalmente multinacionales para obtener cobertura de sus propios riesgos, ya que así tienen una misma filosofía e intereses en común.

A continuación se tienen con mayor detalle, las diversas modalidades de reaseguro que se han dado desde la instauración de éste hasta la fecha.

I. Por el carácter de los aseguradores que intervienen:

1. *Reaseguro normal*, una de las partes actúa como cedente y otra como reasegurador.
2. *Reaseguro recíproco*, ambas partes contratan riesgos con la otra contratante, convirtiéndose a la vez en cedentes de sus riesgos y reaseguradores de los de la otra parte.
3. *Reaseguro de pool*, cuando varios reaseguradores, participan en una proporción determinada en los negocios de una empresa común. Existen pools, donde los reaseguradores aportan parte del capital para constituir la nueva sociedad o bien se constituye una organización común pero sin personalidad jurídica propia.

II. Por la cuantía del riesgo asegurado

1. *Reaseguro total*, la cedente cede al reasegurador la totalidad del riesgo asegurado directamente.
2. *Reaseguro parcial*, la cedente conserva para sí en sus contratos de seguro directo, una parte del riesgo asumido.

III. Por razón de su obligatoriedad:

Dicha clasificación es la que más se utiliza en la actualidad, depende de si las obligaciones contractuales son esporádicas y/o casuales serán contratos de reaseguro *facultativo*; pero si éstas son de carácter permanente y/o integral para ramos de seguros o carteras de negocio completas, serán contratos de reaseguro *obligatorios (automáticos)*.

Según la posición del reasegurador y de la cedente:

Cuadro I.1 Posición de la cedente y el reasegurador¹

		Posición del Reasegurador	
		<i>Debe aceptar el riesgo</i>	<i>Libre de aceptar el riesgo</i>
Posición de la Cedente	<i>Obligación a ceder el riesgo</i>	Reaseguro Obligatorio	Reaseguro Obligatorio-Facultativo
	<i>Libre de ceder o no el riesgo</i>	Reaseguro Facultativo-Obligatorio	Reaseguro Facultativo

De acuerdo a cada tipo:

Cuadro I.2 Tipos de contratos de Reaseguro²

Contratos Obligatorios		Contratos Facultativos	
Proporcional (basado en suma asegurada o PML)	No proporcional (basado en el nivel de siniestro)	Facultativo proporcional	Facultativo No proporcional
Contratos Cuota Parte	XL por riesgo XL por evento		
Contratos de Excedente	Exceso de siniestralidad o		
Otras modalidades	Stop Loss		

1. *Reaseguro facultativo o simple (facultative reinsurance)*. Fue la primera forma de reaseguro que apareció; es aquel en que la cedente no se compromete a ceder ni la compañía reaseguradora se compromete a aceptar determinada clase de riesgos, sino que estos han de ser comunicados individualmente, estableciéndose para cada caso concreto las condiciones que han de regular la cesión y la aceptación, en un contrato individual.

Existen diversos motivos por los cuales una cedente recurre a los reaseguros facultativos, entre las cuales se encuentran:

- Condiciones de premura de tiempo.
- Sus sumas aseguradas sobrepasan sus límites cuantitativos en sus contratos de reaseguro obligatorio.
- Los riesgos se encuentren dentro de las exclusiones de los contratos obligatorios.

¹ "Introducción al Reaseguro", Ed. Fundación Mapfre, pp. 28

² "Introducción al Reaseguro", Ed. Fundación Mapfre, pp. 28

- El riesgo a reasegurar represente un desequilibrio en el resultado técnico de la cedente.
- Debido a una diferencia geográfica de acuerdo a sus demás contratos de reaseguro obligatorios.
- Necesidad de ajustar las pólizas, por ejemplo de empresas multinacionales.
- Cuando quiera introducir en el mercado nuevas clases de negocio, ya que su cartera tendrá un número pequeño de riesgos.

Este tipo de reaseguro representa para la cedente un mayor gasto al tener que buscar reaseguradores en distintos países, el cual puede reducir recurriendo a encargar la tarea a un broker o a un corredor de seguros; pero esto también tiene su inconveniente y es que cuando el reasegurador solicite más información sobre el riesgo en cuestión, al aparecer un intermediario ésta se desvirtúa o sea incompleta.

El reaseguro facultativo puede ser de tipo *proporcional* o *no proporcional*. En el primer caso la reaseguradora asume una responsabilidad en todos los siniestros cubiertos, mientras que en el segundo caso sólo asume una responsabilidad por los grandes siniestros que excedan la prioridad de la cedente (siniestros retenidos).

Los contratos de reaseguro facultativo quedan sujetos casi siempre a los usos y costumbres del reaseguro, representados por la *nota de cobertura* o *nota de oferta*, la cual contiene: fecha de inicio y fin del riesgo original y de la cesión, descripción del riesgo, coberturas, exclusiones, condiciones de la tasa y pago de la prima; y al ser ésta firmada e indicando la cuota de participación por el reasegurador es como se convierte en la *nota de aceptación*.

Se ha llegado a la costumbre de que la prima de reaseguro sea la misma que la prima del seguro original menos la comisión por reaseguro. Asimismo la renovación de la cobertura el reasegurador la lleva a cabo de manera automática hasta que la cedente le comunique lo contrario.

Una de las características más importantes del reaseguro facultativo es la amplia comunicación entre cedente y reaseguradora, ya que la cedente debe describir con mayor detalle cada riesgo para que la reaseguradora tenga una idea clara de éste. Es más en varios casos, se puede dar que la compañía cedente consulte a la reaseguradora líder del mercado para saber su opinión antes de suscribir determinada póliza. Esta buena relación comunicativa también le permite a la compañía reaseguradora que cuenta con una cartera facultativa, analizar la información que le llega de varias fuentes.

2. *Reaseguro obligatorio o automático (obligatory reinsurance)*. Es el más utilizado actualmente debido a que resulta más conveniente para cada una de las partes y responde mejor a las funciones técnicas del reaseguro. Se trata de un acuerdo en el que la cedente se compromete a ceder parte o la totalidad de sus negocios y el reasegurador se compromete a aceptar todo el riesgo cedido, siempre que se

cumplan las condiciones preestablecidas en el contrato suscrito entre ambas partes.

Debido a que es muy difícil que un contrato de este tipo recoja todas las posibles variaciones y que prevea todo tipo de eventualidades, es que se marcan unas normas de conducta que compaginen las actuaciones de cada parte con la práctica sana del mercado. Algunas de las pautas básicas son:

- Cláusula de reaseguro, que detalla el mecanismo de transferencia del riesgo y suele ser: *“La cedente se compromete a ceder al reasegurador los seguros que se describen más adelante y el reasegurador se compromete a amparar dichos seguros”*.
- Sobre el ramo a reasegurar una descripción lo más precisa de éste.
- Las exclusiones como por ejemplo de tipo de seguro o causas de siniestro.
- El concreto ámbito geográfico de cobertura.
- La definición correcta de la retención del reasegurador.
- El precio de la cobertura.
- La manera y el plazo para avisar al reasegurador de los siniestros.
- La definición del sistema de contabilidad a usar entre las partes.
- La forma de resolver y con cuáles mecanismos, las posibles diferencias de interpretación o conflictos (aunque en la práctica se recurre más al arbitraje que a la vía judicial).
- Principio y fin del contrato.

3. *Reaseguro facultativo-obligatorio (facultative obligatory reinsurance)*. Es un reaseguro mixto, en el sentido de que la cedente no se compromete a ceder todos los riesgos del contrato, pero el reasegurador sí se obliga a aceptar los riesgos que le sean cedidos, siempre que se cumplan determinados requisitos previamente establecidos al efecto en un documento, denominado carta de garantía o *cover*; ya que de por sí representan un negocio desfavorable para el reasegurador. Una variante de este tipo de contratos son los *open covers*, los cuales son válidos hasta cierto límite, cuyo valor fue pactado con anterioridad y que abarcan varios contratos; son utilizados por los corredores o brokers de reaseguros y con ellos la cedente transfiere la dificultad que puede llegar a tener para reasegurar determinados riesgos.

4. *Reaseguro obligatorio-facultativo (obligatory facultative reinsurance)*. Es el contrario del caso anterior, es decir, la cedente está obligada a ceder mientras que el reasegurador puede aceptar o rechazar cualquiera de los riesgos que ésta quiera incluir. Como este tipo de reaseguro es muy desfavorable para la cedente, se da sólo cuando existe una relación de dependencia entre reasegurador y reasegurado, por ejemplo, una casa matriz y sus filiales, o empresas con sucursales que puedan aceptar reaseguro. Se trata en general de negocios cautivos.

IV. Por razón del contenido del contrato:

Derivados de los reaseguros obligatorios, según en qué la reaseguradora participe respecto de la cedente en los riesgos aceptados por ésta o en los siniestros efectivamente producidos, puede hablarse, respectivamente, de *reaseguro proporcional* y *no proporcional*.

En el reaseguro proporcional la cedente y la reaseguradora comparten las primas y las pérdidas en una relación contractual definida: la reaseguradora acepta un porcentaje fijo de las obligaciones contraídas bajo el contrato original, y recibe la misma proporción de la prima original, menos una comisión que la reaseguradora le da a la cedente para contrapesar los gastos que ésta tiene al administrar el negocio común. Uno de sus principales inconvenientes es que no pueden proteger totalmente a la cedente contra siniestros que afecten al mismo tiempo a varios de sus asegurados, como por ejemplo los catastróficos.

Las cesiones del reaseguro no proporcional ya no están vinculadas a las sumas aseguradas, sino a las pérdidas, y no hay una relación predeterminada para dividir a las primas y las pérdidas entre cedente y reaseguradora. Existe un monto de pérdidas, llamado *prioridad*, hasta el cual la cedente paga el deducible o la retención neta, y la reaseguradora paga las pérdidas por encima de dicho monto; el coste del reaseguro se calcula una sola vez para todo el ejercicio y de manera global sobre el volumen de primas que se estén reasegurando, el inconveniente es que éste se paga al inicio del ejercicio, antes que la cedente reciba sus primas de seguro directo (aunque actualmente las reaseguradoras aceptan el pago en plazos). Aunque la cedente tiene mayor flexibilidad para suscribir riesgos y puede retener una proporción más elevada de las primas brutas suscritas, tiene el riesgo de haber pagado la tasa de reaseguro sin recibir ninguna contraprestación de la reaseguradora debido a que no se dé ningún riesgo que sobrepase la prioridad dada.

Entre los *reaseguros proporcionales*, denominados también *reaseguros de riesgos o sumas*, existen los siguientes:

1. *Reaseguro cuota-parte (quota share reinsurance)*. Es aquel en el que la reaseguradora participa en un porcentaje fijo en todos los riesgos que sean asumidos por la cedente en determinado ramo o modalidad de seguro. Este porcentaje establece la regla de división de primas y pérdidas entre la cedente y la reaseguradora. El cuota-parte es una forma simple de reaseguro con bajos costos de administración, además de que le dan la oportunidad a la cedente de poder suscribir riesgos hasta el límite (*capacidad*) que haya convenido con la reaseguradora ya que tiene la seguridad de que estos quedarán reasegurados automáticamente; la reaseguradora por su parte está accediendo a carteras más equilibradas. Este tipo de reaseguro se suele contratar cuando:
 - La cedente necesita mejorar su nivel de solvencia, ya que las comisiones que recibe por reaseguro pueden ser más altas que las primas tanto, como para cubrir los gastos de adquisición.
 - Se trate de carteras homogéneas (tipo de riesgos y sumas aseguradas).

- Se trate de compañías de nueva creación, con poca información histórica y experiencia.
- Una cedente empiece a operar un nuevo ramo de seguros.
- La cartera sea pequeña y no alcance el volumen de primas para contratar otro tipo de reaseguro.
- El comportamiento de la siniestralidad sea difícil de pronosticar (por ejemplo en los ramos de responsabilidad civil o de automóviles).
- Sea complicado definir los riesgos de manera individual (por ejemplo en el ramo de pedrisco o en el de crédito).

Uno de los inconvenientes de este tipo de contratos es que no ayuda a equilibrar la cartera y no ofrece una buena protección contra los riesgos punta o la acumulación de pérdidas; ya que la cedente no puede escoger o cambiar su retención para los riesgos punta y entonces se ve en la posición de ceder a la reaseguradora los riesgos menos peligrosos y de menor cuantía.

2. *Reaseguro de excedente (surplus reinsurance)*. Es en el cual la cedente retiene todos los riesgos hasta un cierto monto, la *retención*, y la reaseguradora está obligada a aceptar sólo las cantidades aceptadas por la cedente por encima de la retención. Cuando la suma asegurada es inferior a la retención, la cedente retiene la totalidad del riesgo. Dicha retención se calcula conforme a una *tabla de plenos* (líneas), los cuales se establecen de acuerdo a la gravedad de los riesgos, para riesgos punta la retención es más baja que para los riesgos con mayor siniestralidad.

Para cada riesgo reasegurado, la relación entre las cantidades retenidas y las cedidas determinan cómo las primas y pérdidas son distribuidas entre ellas. A pesar de que el reaseguro de excedente aún no proporciona una protección efectiva en contra de la acumulación de pérdidas, reduce el rango de posibles pérdidas retenidas y la variabilidad relativa de los costos, limitando las exposiciones acumuladas más elevadas y permitiendo ajustar el riesgo.

3. *Reaseguro mixto de cuota-parte y excedente (quota share and surplus reinsurance)*. Esta combinación se da cuando una cedente (normalmente de nueva creación o que comienza a operar un nuevo ramo de seguros), desea suscribir pólizas con sumas aseguradas altas para las cuales requiere una cobertura de reaseguro suficiente, y que a su vez no quiere arriesgarse demasiado con su propia retención.

En los *reaseguros no proporcionales* se encuentran las contrapartidas de los reaseguros proporcionales (tanto para riesgos individuales como para todos los riesgos de una cartera), ya que la cobertura no va sobre las sumas aseguradas sino sobre la siniestralidad. También se les llama *reaseguros de pérdidas o de siniestros*, ya que el reasegurador participa en los siniestros asegurados efectivamente tenidos por la cedente. Su clasificación es la siguiente:

1. *Reaseguro de exceso de pérdida (excess-loss reinsurance)*. Se da cuando la reaseguradora, con relación a determinado ramo o modalidad de seguro, participa en los siniestros de la cedente cuyo importe exceda de una determinada cuantía (*prioridad, retención propia retención de primera pérdida*) preestablecida a tal efecto. El reaseguro de exceso de pérdida es muy eficiente para estabilizar los resultados de la aseguradora, ya que reduce la exposición a los riesgos individuales. También proporciona protección contra acumulaciones y riesgos catastróficos. Debido a que algunas reaseguradoras no aceptan contratos con retenciones bajas, que puedan producir numerosas reclamaciones, la cobertura de exceso de pérdida a menudo se tiene que organizar en capas, lo que aumenta los costos. El concepto de este tipo de reaseguro se entenderá más claramente con la siguiente subdivisión:

- a) *Exceso de pérdida (excess-loss working –WXL-)*. Es cuando el reaseguro cubre a la cedente riesgo a riesgo, es decir ofrece una cobertura contra siniestros que sobrepasen una cantidad determinada de la suma asegurada de una sola póliza. Se le conoce también como “cobertura operativa”.
- b) *Exceso de pérdida de cúmulos o de catástrofe*. Se da cuando un evento o acontecimiento afecta a dos o más pólizas. Si se desea sólo estar protegido contra una catástrofe (CATXL), entonces el deducible deberá ser una cantidad mayor a la que se asumiría por cada póliza.
- c) *Exceso de pérdida mixto de riesgo y de cúmulo*. Es una combinación tanto si se trata de una sola póliza afectada como de varias, siempre que el siniestro supere la prioridad contratada.
- d) *Exceso de pérdida con límites variables*. Es aplicable a carteras no homogéneas, ya que reduce la retención de la cedente en los riesgos más peligrosos, es una variante del WXL; clasifica la cartera de la cedente por grupos de riesgo de acuerdo a su peligrosidad, fijando un deducible diferente para cada grupo. En este caso la reaseguradora fijará un precio más elevado por este tipo de cobertura que por una cobertura operativa.
- e) *Exceso de pérdida acumulativa*. Se da para evitar desviaciones en la siniestralidad, para lo cual se establecen dos retenciones netas, una inferior con los siniestros de mayor frecuencia y otra más elevada con los de menor.

2. *Reaseguro de exceso de siniestralidad (stop-loss reinsurance)*. Es en donde la cedente fija una prioridad anual de la siniestralidad global, ya sea una cantidad del total de primas del período (*stop-loss rate*) o un porcentaje del volumen de capital fijado (*stop-loss ratio*), que está dispuesta a soportar en un determinado ramo o modalidad de seguro, y la reaseguradora se hace cargo del excedente si existiese. Tiene la ventaja de cubrir, además de siniestros de cuantía elevada, las fluctuaciones en el número de siniestros. Sólo este reaseguro puede ofrecer protección contra los aumentos en la severidad y en la frecuencia de las pérdidas, pero sin embargo uno de sus principios fundamentales es que la

cedente no puede tener beneficio por esta vía; por lo que en el cálculo de su retención ésta debe considerar que las primas que retiene más el coste de reaseguro sea suficiente para cubrir los siniestros retenidos más los gastos de administración.

Existen varias posibilidades de liquidar un contrato de reaseguro terminado, que serían las siguientes:

Obligatorio
proporcional

- *Método de retirada de cartera*, en el cual la reaseguradora le devuelve a la cedente su cartera de primas no ganadas.
- *Método run-off*:
 - Liquidación de las primas de cartera. La reaseguradora retiene la parte de la prima por los contratos contraídos, incluyendo la parte no devengada al momento de la terminación, y también es responsable de su proporción en cualquier siniestro que ocurra entre la terminación del contrato y el momento del vencimiento de la siguiente prima anual.
 - Liquidación de la reserva de siniestros. Es cuando se liquida la reserva de siniestros y la reserva de las anualidades de los siniestros ocurridos pero no liquidados.
- *Método de retirada de la reserva de siniestros*, en el que la reaseguradora devuelve la reserva de siniestros y de las anualidades, pagándole a la cedente una cantidad pactada por dicha reserva.

Obligatorio
no proporcional

- *Principio de siniestros ocurridos*, no interviene el cuándo termina la póliza suscrita por la cedente, ya que la responsabilidad de la reaseguradora abarca todos los siniestros que excedan la prioridad de la cedente y ocurran durante el contrato de reaseguro.
- *Principio de pólizas emitidas*, se da cuando la reaseguradora sigue siendo responsable por los siniestros suscritos continuando la terminación del contrato hasta la próxima renovación de las pólizas.

Facultativo

- Termina al mismo tiempo que la cobertura básica de seguro, pueden existir reservas por siniestros no liquidados pero que se estarán liquidando.

CAPÍTULO II. INDICADORES FINANCIEROS EN EL SECTOR SEGUROS

Diferentes agentes económicos como accionistas, autoridades, clientes, empleados, están interesados en conocer cómo se va desarrollando la actividad económica de cierta compañía de seguros. Para estudiar dicho desarrollo se llevan a cabo análisis financieros basados en las cifras que presenta la aseguradora.

Dentro de un análisis financiero una gran herramienta son los ratios, se entiende por ratio, una razón o proporción entre dos variables que nos ayuda a evaluar la gestión de una compañía o negocio, cabe mencionar que los ratios importantes son aquellos que están compuestos por cantidades que presentan una relación de dependencia entre ellas, también para que las variables tengan una comparación congruente, los datos deben ser del mismo periodo de tiempo.

Algunos de los beneficios que aporta el utilizar ratios para el estudio de una compañía de seguros son:

- Observar su desarrollo histórico, su pasado, su situación actual, y determinar algunas probabilidades para su futuro.
- Dar bases a su directiva para la determinación de objetivos y/o toma de decisiones.
- Brindar a los accionistas información sobre el capital y la rentabilidad de la aseguradora.
- Obtener elementos para el estudio de su solvencia y liquidez.
- Poder cumplir con la información de control requerida por las autoridades como Hacienda o las Comisiones o Direcciones de Seguros y/o Reaseguros.
- Dar información a las organizaciones que realizan estadísticas o estudios del sector reasegurador

En el sector asegurador y reasegurador, los ratios que se obtienen para llevar a cabo el análisis se derivan de los Estados Financieros de cada compañía, los cuales son: el Estado de Resultados y el Balance General.

2.1 Estado de Resultados

Otorga información sobre la utilidad o pérdida de la aseguradora en un lapso de tiempo, generalmente un año. El resultado final (utilidad) se obtiene a partir de un sumario de los ingresos y egresos de la operativa de seguros.

Algunos de los conceptos más importantes que lo conforman son:

- Primas emitidas.

Una vez que inicia la vigencia de un seguro, es cuando se da la emisión o lo que es igual al primer ingreso operacional de una aseguradora. Para dicha emisión se toma en cuenta la prima comercial (prima pura de riesgo + gastos de administración y de gestión + utilidad esperada), la vigencia, forma de pago,

suma asegurada, riesgo cubierto y si se trata de un negocio directo o de coaseguro.

- Primas diferidas.

Son aquellas que tienen una vigencia mayor a un año, y por lo tanto los ingresos y gastos de éstas no se contabilizan hasta que la obligación/ beneficio esté total o parcialmente satisfecha/ consumido.

- Primas futuras.

Son lo contrario a las emitidas, es decir, corresponden a pólizas emitidas pero que su vigencia aun no ha iniciado.

- Primas devengadas.

Se refiere al porcentaje de la prima que se utiliza para asegurar, es decir, es la prima ganada por la aseguradora porque su vigencia ya venció.

- Comisiones.

Es la cantidad generada a favor del agente de seguros o de la correduría de seguros, debido a la captación de negocios para la aseguradora.

- Reservas técnicas.

Son las reservas (cantidades que la aseguradora requiere para hacer frente a su obligaciones en un determinado periodo de tiempo) que debe constituir una compañía de seguros. Entre las cuales se encuentran:

- Reserva de Riesgos en Curso.

Por Ley corresponde a una parte de las primas netas retenidas que se mantiene en reserva, para que los asegurados puedan seguir siendo indemnizados por siniestros ya ocurridos, a pesar de que el ejercicio contable de la compañía de seguros haya terminado.

- Reserva matemática.

Es la diferencia entre las primas recibidas del asegurado y los siniestros pagados por la aseguradora en los primeros años, la cual se va incrementando debido a las primas futuras y los intereses devengados.

Esta reserva aplica para aquellos ramos que generan obligaciones a largo plazo como por ejemplo en el de Vida.

- Reserva de Siniestros Reportados.

Es el valor estimado por la aseguradora para hacer frente a siniestros que han sido comunicados en el ejercicio pero que aun no se han liquidado.

- Reserva de Siniestros No Reportados (IBNR).
Se conforma para hacer frente al pago de los siniestros que se producen durante la vigencia de la póliza pero que son comunicados en otro ejercicio contable.
- Reserva de Desviación de la Siniestralidad.
Dicha reserva sirve para hacer frente a los riesgos catastróficos, los cuales pueden llevar a una desviación de la siniestralidad que tenga prevista la aseguradora.

- Siniestros liquidados.

Es el derecho que tienen los asegurados para que se les pague el valor total de la liquidación al sufrir un(os) siniestro(s) causado(s) por un(os) hecho(s) eventual(es), casual(es) e involuntario(s); siempre y cuando cumplan con los requisitos exigidos por la póliza contratada con la compañía de seguros.

- Coaseguro.

Es cuando las aseguradoras crean alianzas para poder asumir ciertos riesgos, en la mencionada alianza una de las compañías será la líder, la cual administrará el negocio. El coaseguro puede ser de dos tipos:

- Coaseguro cedido.
Es donde la compañía líder cede a las demás el riesgo, pero ella se queda ella con el mayor porcentaje de participación de éste.
- Coaseguro tomado o aceptado.
Es cuando una aseguradora acepta un riesgo de parte de otra compañía de seguros.

- Reaseguro

Es muy común que las compañías de seguros (cedentes) utilicen este sistema para poder suscribir negocios en los cuales, sin un contrato de reaseguro, el riesgo podría superar sus capacidades financieras al límite de comprometer su patrimonio. Los tipos de reaseguro ya se vieron en el capítulo anterior.

A continuación, como ejemplo, se pueden observar las cuentas (grandes rubros) del Estado de Resultados de una compañía de seguros:

Cuadro II.1 Estado de Resultados

<p>ESTADO DE RESULTADOS (Grandes rubros)</p> <p>PRIMAS DIRECTAS PRIMA TOMADA PRIMAS DIRECTO + TOMADO</p> <p>SINIESTROS GASTOS DE AJUSTE OPNR INCTO. RVA. SIN. PENDIENTES DE VALUACION INCREMENTO EN LA RVA. DE DIV. RECUPERACIONES NO CORRESPONDIENTES A REAS. COSTO DE SINIESTRALIDAD</p> <p>COMISION A FAVOR CONTRATANTES COMISIONES A AGENTES BONOS Y PREMIOS OTROS GASTOS DE ADQUISICION COM. Y DIV. POR REAS. TOMADO GASTOS DE ADQUISICION</p> <p>PRIMA CEDIDA COM. Y DIV. POR REAS. CEDIDO PARTICIPACION DE UTILIDADES PRIMAS EN EXCESO DE PERDIDA SINIESTROS RECUPERADOS OTROS COSTOS DE REASEGURO COSTO DE REASEGURO CEDIDO</p> <p>AJUSTE POR SEGURO DIRECTO AJUSTE POR REASEGURO TOMADO AJUSTE POR INSUFICIENCIA, SEG. DIRECTO PROVISION PARA GASTOS DE ADMON., SEG. DIRECTO INCREMENTO DE RVAS. RIESGOS EN CURSO</p>
CONTRIBUCION TECNICA
<p>OTRAS RESERVAS GASTO DE ADMINISTRACIÓN PRODUCTO FINANCIERO IMPUESTOS S/ UTILIDAD</p>
UTILIDAD FINAL

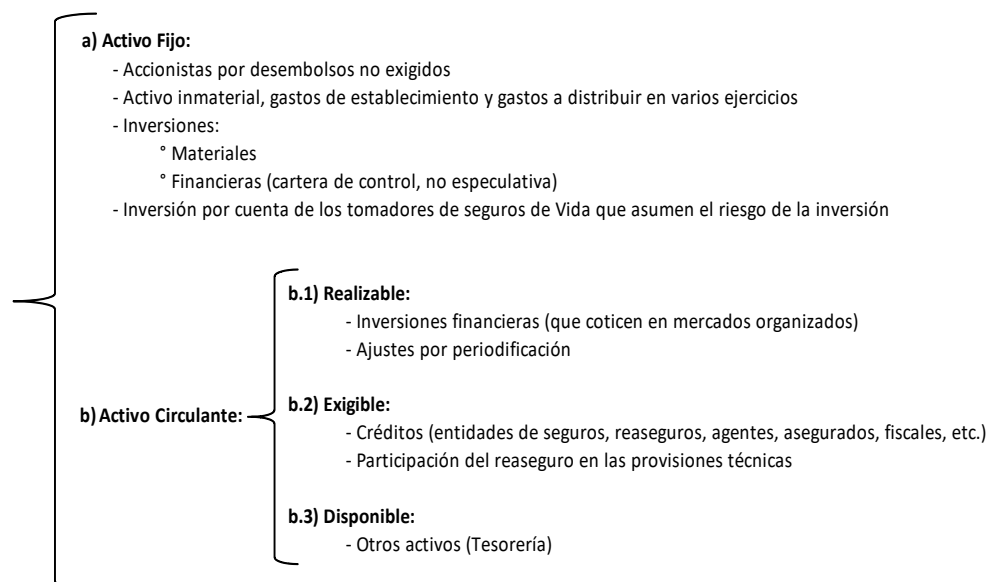
En un principio, podríamos decir que si una compañía de seguros obtiene beneficios continuados durante varios años, dicha aseguradora es sólida económicamente, pero estos beneficios se reparten entre los accionistas; así también en cada ejercicio contable se comienza de nuevo y se atiende a que la compañía sea capaz de mantener los resultados obtenidos hasta la fecha para poder enfrentar una crisis. Es por ello que reforzamos el porqué no sólo se utiliza el Estado de Resultados para examinar

financieramente una compañía de seguros sino también el documento que se describe a continuación.

2.2 Balance General

Es el Estado Financiero que muestra el origen de los recursos económicos de la compañía, es decir los derechos y obligaciones a un corte temporal determinado, éste se clasifican en:

- **Activo:** Son los bienes y las deudas (derechos) que otros tienen para con la aseguradora. Puede ser *corriente* (activos que se pueden convertir fácilmente en efectivo) o *no corriente* (activos a largo plazo y que no se pueden convertir fácilmente en efectivo).



3

- **Pasivo:** Son las deudas (obligaciones) que tiene la aseguradora con terceros, éste apalanca la operación. Igualmente puede ser *corriente* (obligaciones que debe cancelar en un año o menos) o *no corriente* (aquellas obligaciones que su periodo de pago es superior a la anualidad).

³ “Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras”, pp. 486-487

a) Pasivo Neto (no exigible):

- Capital y Reservas
- Ingresos a distribuir en varios ejercicios

b) Exigible a largo plazo:

- Provisiones técnicas:
 - ° Matemáticas (netas de reaseguro*)
 - ° Riesgos en curso (netos de reaseguro*)
 - ° Desviación de siniestralidad (neta de reaseguro*)
 - ° Otras provisiones
- Provisiones técnicas de Vida cuando el riesgo de inversión lo asumen los tomadores
- Provisiones para riesgos y gastos

c) Exigible a corto plazo:

- Pasivos subordinados
- Provisión técnica para prestaciones (neta de reaseguro*)
- Depósitos recibidos por el reaseguro cedido
- Deudas
- Ajustes por periodificación

* Se refiere a (seguro directo + reaseguro aceptado - reaseguro cedido)

4

- **Patrimonio:** Es la inversión de los accionistas en la compañía, es decir su capital, o el activo resultante después de deducirle el pasivo.

$$\text{Activo} + \text{Pasivo} = \text{Patrimonio}$$

Los indicadores financieros pueden llegar a ser muy variados, por eso en el sector asegurador se utiliza la siguiente clasificación:

a) Liquidez.

Es la facilidad con que los activos se pueden volver en efectivo, esto con el objetivo de pagar las deudas antes de los vencimientos. En seguros, son los activos de los que se puede disponer inmediatamente y los pasivos que vienen de las obligaciones exigibles a corto plazo. Los ratios de liquidez muestran la solvencia inmediata que tiene la compañía para saldar sus deudas sin tener que endeudarse más o vender inversiones a largo plazo; pero tampoco es recomendable un alto ratio de liquidez ya que esto significaría que la aseguradora tiene un gran nivel económico a corto plazo el cual sería mejor invertir y obtener rendimientos.

Un ratio adecuado será aquel que cumpla con el plan financiero y las políticas de inversión de la compañía aseguradora, siempre que cumplan con el Régimen de Inversión y las Reglas de Liquidez de las Reservas de cada país.

⁴ "Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras", pp. 487-488

Los ratios de liquidez más utilizados son⁵:

Cuadro II.2 Ratios de Liquidez

RATIO	INTERPRETACIÓN
(Activo circulante + exigible) / Pasivo Circulante	Ratio que muestra la posibilidad de la aseguradora para hacer frente a sus obligaciones de vencimiento inmediato (liquidez a corto plazo).
Activo Circulante / Pasivo Circulante	Llamado de distancia a la suspensión de pagos o de liquidez a medio plazo, muestra la proporción de recursos disponibles para cubrir obligaciones a corto y medio plazo, es decir, indica el número de veces que la aseguradora puede cubrir sus obligaciones de corto y medio plazo con sus activos líquidos. Si es < 1 refleja una posible suspensión de pagos.
(Activo Circulante - Cartera) / Pasivo Circulante	Ratio de solidez, el cual indica la capacidad de la aseguradora para cubrir las obligaciones a corto plazo con los recursos disponibles sin incluir la cartera.
Activo Disponible / Pasivo Exigible	Indicador equivalente a la Prueba del Ácido. Muestra cuántas veces puede la compañía absorber las obligaciones de realización inmediata a través de sus activos con mayor grado de liquidez a los anteriores.
Activo Circulante / Pasivo Exigible	Consiste en una combinación de los ratios anteriores reflejando así la capacidad de la compañía de seguros de hacer frente a sus obligaciones de realización inmediata por medio de sus activos líquidos.
Activo Circulante / Reservas Técnicas	Proporción que indica el grado de respuesta que en un momento dado puede tener una empresa frente a las obligaciones técnicas con los asegurados por medio de sus activos líquidos.
Inversiones Financieras / Pasivo Circulante	Ratio que proporciona el número de veces que las inversiones financieras respaldan las obligaciones de corto plazo, por lo que también es llamada como el ratio de "liquidez financiera".
Capital de Trabajo	Indica el monto de recursos que requiere la compañía aseguradora para operar en el corto plazo. Se determina de la manera siguiente: <div style="text-align: right;"> Inversiones Productivas + Activos contractuales - Oblig. afectas a Rvas. Técnicas y Legales Sobrante\Faltante de Cobertura + Activo circulante - Pasivo circulante <i>Capital de Trabajo</i> </div>

⁵ Basado en Cuadro 3 "Razones Financieras del Sector Asegurador", pp. 7-8

b) Solvencia y Apalancamiento.

Los ratios de solvencia miden la capacidad de la compañía de seguros para satisfacer sus obligaciones financieras (deudas), mientras que los de apalancamiento miden el cómo una aseguradora recurre al financiamiento de su capital por medio de endeudamiento.

No hay que confundir la liquidez con solvencia, ya que ésta toma en cuenta todos los recursos de la aseguradora, no sólo aquellos que a corto plazo se pueden convertir en efectivo.

Una ventaja positiva del apalancamiento, es que las deudas brindan una ventaja fiscal ya que los pagos de intereses son deducibles. Una compañía puede tener un gran retorno de capital al estar muy apalancada, pero corre el riesgo que implica la naturaleza de los pasivos así como la de los instrumentos financieros en donde éstos están invertidos; por eso es recomendable que la compañía de seguros tenga un perfil conservador de apalancamiento.

Estos dos conceptos van muy de la mano ya que si la compañía de seguros tiene un nivel excesivo de deudas, puede ocasionar una mayor probabilidad de insolvencia y dificultades financieras.

Los ratios de apalancamiento y solvencia más utilizados en el sector seguros son⁶:

⁶ Basado en Cuadro 4 “Razones Financieras del Sector Asegurador”, p. 9

Cuadro II.3 Ratios de Solvencia y Apalancamiento

RATIO	INTERPRETACIÓN
$\frac{\text{Activo Total}}{\text{Pasivo Total}}$	Ratio más usual de solvencia que indica el número de veces que puede hacer frente la empresa al total de sus obligaciones con el total de sus recursos.
$\frac{\text{Pasivo Total}}{\text{Activo Total}}$	Indicador de endeudamiento, que permite analizar qué cantidad de los recursos de la compañía de seguros ha sido financiada por recursos de terceros, por ejemplo a través de compras a crédito o préstamos.
$\frac{\text{Pasivo exigible}}{\text{Neto Patrimonial}}$	Otro ratio de endeudamiento, que mide el grado de la deuda comparada con los fondos propios de la aseguradora, al crecer representa el aumento en el número de asegurados. Si este ratio es alto las provisiones técnicas deben estar cubiertas adecuadamente, es decir, sus inversiones materializadas.
$\frac{(\text{Activo Total} - \text{Fijo})}{(\text{Pasivo Total} - \text{Rva. Prev.} - \text{Rva. Rgos. Curso} - \text{Rva. Oblig. Pend. Cmpl.})}$	Medida de solvencia financiera más precisa que muestra la cantidad de veces en que los activos disponibles cubren a las obligaciones de acreedores distintos a los asegurados, como son los agentes, ajustadores o reaseguradores.
$(\text{Cap. Cont.} + \text{Rva. Prev.}) / \text{Req. Bruto de Solv.}$ RBS= Cap. Min. Garantía + Rva. prev.	Ratio que indica cuántas veces se cubren los requerimientos de capital para hacer frente a las desviaciones en la siniestralidad y en el valor de las inversiones por medio de los recursos que respaldan a dichos requerimientos. Existe un margen de solvencia cuando es mayor a uno.
$\frac{\text{Prima Retenida}}{(\text{Cap. Cont.} + \text{Rva. Prev.})}$	Muestra el porcentaje de retención respecto a la capacidad de retención potencial.
$\frac{\text{Cap. Garantía}}{\text{Cap. Min. Garantía}}$	Razón que se le denomina como el Margen de Solvencia, e indica la suficiencia o insuficiencia de capital, en cuanto a que se refiere al número de veces en que es o no es cubierto el mínimo capital requerido (no es cubierto cuando el ratio es menor a uno).
$\frac{(\text{Margen de Solvencia} - \text{Cuantía mínima del margen de solvencia})}{\text{Margen de solvencia}}$	Muestra la cuantía del margen de solvencia en función de la distancia al mínimo.
$\text{Margen de Solvencia} / \text{Cap. Garantía}$	Muestra el sobrante de capital como porcentaje del mínimo requerido.
$\text{Rva. Prev.} / (\text{Sin. Ret.} + \text{Sin. Recup. por Reas.})$	Muestra el margen para absorber desviaciones de siniestralidad.
$\frac{(\text{Inversiones} + \text{Deudor por Prima} - \text{Comis. por Devengar})}{(\text{Rvas. Técnicas} + \text{Oblig. Contr.} + \text{Rva. Jubilación})}$	Indica el porcentaje en que las inversiones respaldan financieramente a las obligaciones contractuales. Indica el grado de respaldo que tienen las reservas de los asegurados.
$\text{Pasivo Total} / \text{Capital Contable}$	Indicador que proporciona la cantidad de veces en que están comprometidos los recursos de los asegurados en las obligaciones de la aseguradora.
$\text{Capitales propios} / \text{Pasivo Total}$	Muestra la cantidad de recursos que son patrimonio de los accionistas, lo que es la autonomía financiera de la compañía de seguros.
$\text{Reservas Técnicas} / \text{Capital Contable}$	Ratio que muestra el grado en que los recursos de los accionistas se encuentran comprometidos en las obligaciones con los asegurados.
$[\text{Rvas. Téc. (t)} - \text{Rvas. Téc. (t-1)}] / \text{Capital Contable}$	Ratio de apalancamiento que muestra si los recursos de los accionistas a lo largo de un año son suficientes para respaldar el cambio de las reservas.
$\frac{(\text{Resultado de ejercicios anteriores} + \text{Resultado del ejercicio})}{\text{Capital suscrito}}$	Ratio de pérdidas acumuladas, si es > -25% la compañía estaría sujeta a medidas cautelares.
$\frac{(\text{Resultado de ejercicios anteriores} + \text{Resultado del ejercicio})}{\text{Capital propios}}$	Si es < -50% la compañía de seguros tendría una causa de disolución.

c) Estructura de Costes (suficiencia de la prima).

Los indicadores de la estructura de costes más usuales son⁷:

Cuadro II.4 Ratios de Estructura de Costes

RATIO	INTERPRETACIÓN
Coste medio de Operación = Coste Operación / Prima Directa	Porcentaje de la prima que se destina a cubrir los costes de operación de la aseguradora.
Coste medio de Adquisición = Coste Neto de Adquisición / Prima Retenida	Porcentaje de la prima que se destina a cubrir los costes de adquisición de la aseguradora. Donde el <i>Coste Neto de Adquisición</i> = Coste de Adquisición del Seguro Directo + Comisiones por el Reaseguro Tomado - Comisiones por el Reaseguro Cedido.
Coste medio de Siniestralidad = Sin. de Retención / Pr. Dev. de Retención	Indica la proporción del ingreso por primas que se destina a cubrir los costes de siniestralidad.
Índice Combinado = Cte. medio Op. + Cte. medio Adq. + Cte. medio Sin.	Es la suma aritmética de los tres costes medios anteriores, referenciados a la prima relevante de cada caso.
Suficiencia de la prima = 1 - Índice Combinado	Muestra en qué porcentaje cubre la prima a la totalidad de los costes (un valor negativo indicará insuficiencia).
1 - [Índice Combinado - (Prod. Fin. / Prima Devengada de Retención)]	Se representa la suficiencia de la prima tomando en cuenta los productos financieros.
Coste Técnico = $\frac{(\text{Siniestros Incurridos} + \text{Primas Cedidas} + \text{Costes de Reaseguro} + \text{Otros costes de Seguros})}{(\text{Prima Emitidas} - \text{Reserva Técnica})}$	Muestra la eficiencia de la compañía, mediante los costes incurridos en la operación respecto a las primas.

Es gracias a estos ratios donde se puede observar la suficiencia de la prima, es decir, que la prima sea suficiente para cubrir los costes de siniestralidad, adquisición y operación. Cuando la prima no alcanza dicho grado de suficiencia, entonces los productos financieros en los que haya invertido la compañía de seguros harán frente a la actividad de la aseguradora; lo cual conlleva al riesgo de depender de cambios en las tasas de interés o en la valuación de las operaciones de inversión. Por lo cual en la toma de decisiones de la compañía se debe poner atención en la cifra de las primas que se destinarán para cubrir dichos costes.

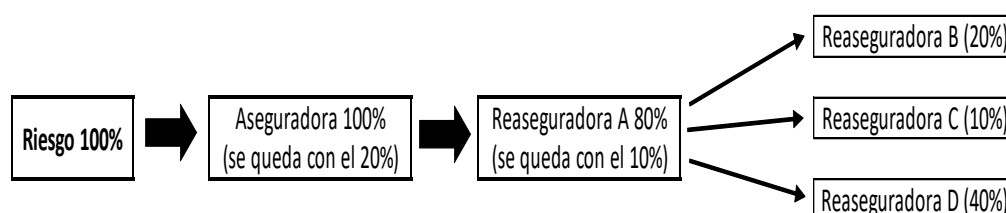
d) Reaseguro.

Financieramente ofrece a la compañía de seguros por una parte cobertura y a la vez una manera de distribuir el riesgo, esto para que el coste del seguro sea

⁷ Basado en Cuadro 5 "Razones Financieras del Sector Asegurador", p. 10

justo, equitativo y se minimice tanto para los asegurados como para la aseguradora.

Como ya se vio anteriormente el reaseguro es el medio a través del cual la compañía de seguros transfiere parte del riesgo que asume, ya sea a otra aseguradora (reaseguro activo) o a una reaseguradora profesional (reaseguro pasivo). Lo usual es que en la dispersión del riesgo actúen varias compañías de reaseguro, mediante sus brokers (así se mantiene su carácter internacional). Ejemplo:



Los ratios más utilizados para la medición de las políticas de reaseguro son⁸:

Cuadro II.5 Ratios de Reaseguro

RATIO	INTERPRETACIÓN
Prima Cedida / Prima Emitida	Muestra el porcentaje de cesión de la aseguradora y determina su dependencia del reaseguro proporcional.
Prima Retenida / Prima Emitida	Representa el <i>porcentaje de retención</i> , es decir, el grado en que la aseguradora absorbe la prima del asegurado.
Comisión Reaseguro Cedido / Prima Cedida	Indica la recuperación en gastos de administración y adquisición de la aseguradora por concepto de reaseguro proporcional.
Cobertura Exceso de Pérdida / Prima Retenida	Muestra el coste del reaseguro por exceso de pérdida.
$\frac{\text{Siniestros Recuperados}}{\text{Pr. Ced. Devuelta} + \text{Cob. Exc. Perd.}}$	Índice de siniestralidad del reasegurador.
$\frac{\text{Sin. Recup.} + \text{Comisión Recuperada de Reaseguro}}{\text{Pr. Cedida}}$	Ratio que funciona como una aproximación del resultado técnico del reaseguro.
$\frac{[\text{Pr. Ced. Dev.} + \text{Cob. Exc. Perd.} - \text{Com. Reas.} - \text{Sin. Recup.}]}{[\text{Pr. Ced. Dev.} + \text{Cob. Exc. Perd.}]}$	Utilidad del reasegurador.
Sin. Retenidos / Pr. Devengada de Retención	Después del reaseguro, este ratio muestra el porcentaje que representan los siniestros en la operación de la aseguradora.
$\frac{\text{Valor de los bienes aptos y afectos}}{\text{Prov. Téc. Netas de Reas. cedido}}$	Ratio de cobertura de las provisiones técnicas, su déficit no puede ser > 10%.

⁸ Basado en Cuadro 6 “Razones Financieras del Sector Asegurador”, p. 11

e) Rentabilidad.

Es uno de los conceptos más difíciles de medir para las compañías, ya que no existe una manera explícitamente precisa de decir cuándo un negocio es rentable; por ejemplo una nueva compañía de seguros requerirá una mayor inversión de capital al inicio de su actividad, y en el primer año tendrá una utilidad baja hasta que vaya consolidando su cartera y obtenga una rentabilidad futura.

Las utilidades muestran la diferencia entre los ingresos y los costes; en general se podría decir así, a mayor utilidad en relación al capital y a las ventas de seguros, mayor será la rentabilidad de la aseguradora.

Sus ratios usuales son⁹:

⁹ Basado en Cuadro 7 “Razones Financieras del Sector Asegurador”, p. 12

Cuadro II.6 Ratios de Rentabilidad

RATIO	INTERPRETACIÓN
Utilidad Neta / Cap. Contable	Ratio que indica cuánto produjo la operación de la aseguradora por cada unidad monetaria del capital.
Utilidad Neta / Cap. Pagado	Rentabilidad de los recursos formados por las aportaciones de los accionistas.
Utilidad Neta / Cap. Pagado + Rva. Capital	Rentabilidad de las aportaciones de los accionistas más las utilidades no distribuidas (destinadas a reforzar el capital original).
Crec. real Rvas. Prev. + Crec. real Capital Contable + Crec. real Rvas. Catastróficas	Ratio que señala la rentabilidad del patrimonio total en concepto de su crecimiento real.
Utilidad Neta / Prima Directa	Ratio que muestra el margen de utilidad de las ventas directas por primas.
Utilidad Neta / Prima Emitida	Proporción de la rentabilidad de la emisión.
Utilidad Neta / Prima Retenida	Muestra la utilidad generada, tomando en cuenta todos los ingresos y gastos, exceptuando el impuesto sobre la renta de la operación.
$\frac{\text{Utilidad Técnica}}{\text{Pr. Dev. de Ret.}}$	Es el rendimiento propio de la actividad aseguradora de la compañía, ya que muestra la rentabilidad de la operación técnica del seguro como porcentaje de los ingresos.
Utilidad Neta / Capital de Trabajo	Rentabilidad de los recursos que requiere la aseguradora para operar a corto plazo.
$\frac{(\text{Ut. Neta} + \text{Inc. Sup.} + \text{Inc. Rvas. de Cap.})}{\text{Activo Total}}$	Ratio que muestra el rendimiento de los recursos de la compañía relativos a la utilidad neta por la operación junto con los incrementos del capital, respecto a los activos totales. Es decir se trata del llamado ROA (rendimiento sobre activos).
$\frac{(\text{Ut. Neta} + \text{Inc. Sup.} + \text{Inc. Rvas. de Cap.})}{\text{Capital Contable}}$	Relación entre los recursos de los accionistas (fondos propios) y el resultado del ejercicio, es decir, mide la tasa de retorno de las inversiones de los accionistas. Lo que se conoce como ROE (rendimiento sobre capital).
$(\text{Ut. Neta} + \text{Inc. Sup.} + \text{Inc. Rvas. de Cap.}) / \text{Prima Emitida}$	Proporciona el rendimiento en relación al volumen de la operación.
$(\text{Utilidad Bruta} + \text{Coste de financiación ajena}) / \text{Activo neto medio}$	Ratio que mide la rentabilidad de los recursos totales de la aseguradora, es decir, la eficacia con la que se han empleado estos.
Rentabilidad del margen comercial x Rentabilidad de recursos permanentes	Ratio que mide la rentabilidad de los recursos permanentes de la aseguradora, debe ser muy superior al ratio anterior.
$(\text{Utilidad bruta} + \text{Coste de financiación ajena}) / (\text{Primas} + \text{Recargos})$	Muestra la rentabilidad del margen comercial, o lo que es lo mismo el porcentaje de beneficio que la compañía de seguros obtiene por las primas, el cual debe ser muy pequeño.
$\frac{(\text{Primas} + \text{Recargos})}{\text{Recursos permanentes invertidos en la explotación}}$	Ratio que mide la rotación de los recursos permanentes, representa el significado de la prima respecto al capital propio. Por ejemplo si es elevado quiere decir que con poco capital propio se consigue un elevado volumen de negocio.
$\frac{\text{Utilidad bruta contable}}{[(\text{Primas adquiridas})/2 + \text{Prov. Téc. iniciales} + (\text{Prov. Téc. Finales})/2]}$	Ratio que mide la rentabilidad de las inversiones de primas y provisiones técnicas.

f) Actividad.

Los ratios de actividad son los que nos sirven para medir la eficiencia con la que se administran los activos de la compañía, que en términos de seguros, son las primas a cobrar, lo cual permite planear los pagos. Incluyen cuentas tanto del Balance como del Estado de Resultados, dichos ratios son¹⁰:

Cuadro II.7 Ratios de Actividad

RATIO	INTERPRETACIÓN
[Deuda por Prima/Pr. Dir.] * 365 días (Vida)	Ratio que mide el número de días promedio que tarda la aseguradora en cobrar las primas de la operación de Vida.
[Pr. por Cobrar/Pr. Dir.] * 365 días (Acc. y Enf. y Daños)	Número de días promedio en que tarda la compañía de seguros para la recuperar lo cobrado por las primas de las operaciones de Accidentes y Enfermedades, y Daños.
Sin. Dir. por Pagar / Cto. de Sin. Dir.	Ratio con el que se obtiene el periodo promedio para el pago de siniestros.
(Primas + recargos) / Recursos propios	Mide el grado de utilización de los recursos aportados por la compañía.
Prov. Téc. para prestaciones (media) / Sin. Total del ejercicio	Ratio que mide la celeridad en la liquidación de los siniestros por parte de la aseguradora (un nivel alto indica dificultades de liquidez).

g) Crecimiento y Participación.

Este tipo de indicador sirve para mostrarle a la compañía de seguros, cuál es su situación comparada con ella misma, con el sector asegurador de su propio país, e incluso llevar el análisis con países extranjeros que manejen sus mismos o alguno de sus ramos o que sea de la misma categoría. Algunos ratios que se utilizan son¹¹:

¹⁰ Basado en Cuadro 8 “Razones Financieras del Sector Asegurador”, p. 13

¹¹ Basado en Cuadro 9 “Razones Financieras del Sector Asegurador”, p. 13

Cuadro II.8 Ratios de Crecimiento y Participación

RATIO	INTERPRETACIÓN
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía. (t)} - 1}{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía. (t-1)}}$	Mide el crecimiento de la compañía respecto al mismo periodo del año anterior.
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía. (t)} - \text{Crec. Real Primas Dir. Cía. (t-1)}}{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía. (t-1)}}$	Muestra el crecimiento de la aseguradora, si se encuentra por encima de la media del mercado es que está ganando cuota de mercado.
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía. por ramo (t)} - \text{Crec. Real Primas Dir. Cía. por ramo (t-1)}}{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía. por ramo (t-1)}}$	Ratio de variación de ingresos, mide en qué porcentaje ha crecido respecto a los ingresos el ramo que se esté evaluando.
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía.}}{\text{Crec. Real Primas Dir. Mercado}}$	Compara el desarrollo de la compañía con el de la industria aseguradora.
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. Cía.}}{\text{Crec. Real Primas Dir. Nivel}}$	Muestra el dinamismo de la compañía con el de aquellas de su mismo nivel.
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. por Operación}}{\text{Crec. Real Primas totales}}$	Realiza una comparación de la eficacia de las distintas operaciones de la aseguradora con las de la compañía en general.
$\frac{\text{Crec. Real Primas Dir. por Operación Cía.}}{\text{Crec. Real Primas Dir. por Operación Mercado}}$	Ratio que compara la operación de la compañía aseguradora con el ramo de toda la industria de seguros.

h) Eficiencia productiva.

También conocida como *eficiencia técnica*, se refiere a cuando la aseguradora utiliza sus recursos de manera eficiente, es decir, aumenta su producción utilizando la menor cantidad de recursos. Cabe mencionar que no es lo mismo que la eficiencia económica, la cual se refiere a que la compañía aseguradora será eficiente cuando en términos monetarios, el costo de un método de producción elegido sea el más bajo. En este sentido, los ratios de eficiencia y productividad más utilizados en el sector seguros son¹²:

¹² Basado en Cuadro 10 “Razones Financieras del Sector Asegurador”, p. 14

Cuadro II.9 Ratios de Eficiencia Productiva

RATIO	INTERPRETACIÓN
Primas Emitidas / No. Empleados	Ratio que muestra la productividad por cada empleado (factores de producción).
Primas Emitidas / No. Oficinas	Ratio que indica la productividad por cada oficina.
No. Pólizas / No. Empleados	Se puede considerar una medida alternativa para observar la productividad por empleado.
No. Reclamaciones Pagados/No. Reclamaciones Hechas	Eficiencia que se mide mediante el porcentaje de reclamaciones pagadas con respecto al total de las que se reportaron.
No. Casos Legales Iniciados/No. Recl. Hechas	Ratio de efectividad que muestra el porcentaje de casos legales iniciados con respecto al número de reclamaciones hechas.
Productos Financieros / Utilidad Ejer.	Ratio de productividad que mide la proporción de la utilidad proveniente de los productos financieros.
Productos Financieros / Inversiones	Ratio con el que se observa la rentabilidad de las inversiones derivadas de los productos financieros.
$\frac{[\text{Prod. Fin.} + \text{Sup.}]}{[(\text{Inversión (t)} + \text{Inversión (t-1)}) / 2]}$	Ratio que muestra el rendimiento propio de la actividad financiera de la empresa.
Recibos de primas pendientes / (Primas + Recargos del ejercicio)	Indica la eficacia en el cobro de recibos.
SalDOS de agentes / (Primas + Recargos del ejercicio)	Indica la eficacia en el cobro por medio de agentes.

En este contexto, el estudio de los estados financieros a través de ratios o indicadores sirve para evaluar cómo se está desempeñando la aseguradora; y también nos brinda una visión más completa sobre su situación financiera.

El enfoque del análisis financiero dependerá de los intereses y objetivos para los cuales se realiza el estudio. Por ejemplo, si el análisis se lleva a cabo para cumplir con la inspección y vigilancia del órgano regulador entonces el estudio se enfocará primordialmente a las razones financieras que evalúen tanto la liquidez y solvencia como la suficiencia de la prima y la eficiencia. En cambio, si el análisis es para otorgar un reporte a los accionistas, entonces el estudio se enfocaría a los ratios financieros que miden la rentabilidad de la empresa. Sin embargo, cabe recalcar que todos los enfoques se complementan entre sí aún cuando un análisis particular enfatice un área u otra en específico.

CAPÍTULO III. MEDIDAS DE RIESGO APLICADAS AL PROBLEMA DEL REASEGURO ÓPTIMO

Actualmente se considera a la definición, clasificación, medición y control del riesgo como los componentes fundamentales de toda metodología de gestión de riesgos.

Si nos restringimos a los riesgos de naturaleza económico-financiera, una clasificación sería que los principales tipos son: el *Riesgo de Crédito* (que resulta de la incapacidad de los prestatarios de cumplir sus obligaciones contractuales), *Riesgo de Liquidez* (que resulta de la incapacidad o dificultad de atender las obligaciones financieras a corto plazo), *Riesgo de Mercado* (que resulta de las fluctuaciones del valor de mercado de los activos) y *Riesgo Operativo* (que resulta de todo tipo de fallos administrativos). Esta clasificación no agota todos los tipos de riesgos a los que hacen frente las instituciones económicas, por ejemplo, la Seguridad Social hace frente a los riesgos económicos como la inflación o las crisis económicas, riesgos políticos asociados con nuevas leyes y reglamentos, riesgos demográficos asociados con una mayor longevidad de los pensionistas o una menor tasa de natalidad, riesgos de epidemias o catástrofes, etcétera. Un riesgo importante que siempre está presente en algún nivel es el *Riesgo del Modelo*, que es el asociado al uso de un modelo inapropiado para la medición de riesgos.

Entonces ¿es posible definir el “riesgo” en general?, encontramos pocas referencias explícitas en la literatura especializada, pero la definición que mejor caracteriza, tanto la idea intuitiva de riesgo en general, como los riesgos de naturaleza económica y financiera en particular, es que: “puede ser un suceso o un conjunto de sucesos desfavorables que pueden o no suceder”. Para que exista un riesgo es esencial tanto la incertidumbre sobre algún resultado como que ese resultado represente una pérdida potencial.

Utilizando los datos históricos, los actuarios estiman la probabilidad de que los eventos ocurran, y asimismo, sus pérdidas consiguientes. Con lo cual, y de acuerdo a la representación matemática, los modelos matemáticos usuales aplicados a la resolución de problemas financiero-actuariales suelen identificar los riesgos como *variables aleatorias cuyas distribuciones son conocidas, al menos parcialmente, y cuyos resultados incluyen la posibilidad de pérdidas* (ésta será nuestra definición de riesgo).

En cuanto a la medición del riesgo, a veces se toma como definición y medida del riesgo, a la sustitución de toda variable aleatoria por un número real, el cual será su esperanza matemática, pero resulta evidente que la esperanza matemática no puede ser una buena medida del riesgo ya que no podemos medir los sucesos por el número medio de éstos. La esperanza matemática puede ser, sin embargo, una herramienta útil cuando hacemos elecciones entre alternativas con consecuencias inciertas, es decir, entre riesgos; utilizando la *Teoría de la Utilidad Esperada* de John von Neumann y Oskar Morgenstern (1947), la cual establece que los decisores racionales siempre elegirán aquella alternativa con un valor más alto de la esperanza matemática de la utilidad de las distintas consecuencias. Lo que resulta importante no es $E[X]$ sino

$E[u(X)]$, en donde X es el riesgo y u la función de utilidad que representa las preferencias y la actitud frente al riesgo del decisor. En los análisis económicos se suele asumir la concavidad de esta función, lo que equivale a presuponer la aversión al riesgo del decisor (es decir, que prefiera obtener resultados ciertos en lugar de exponerse a resultados inciertos con la misma esperanza matemática que los resultados ciertos). Se supone habitualmente que los agentes económicos que compran seguros o reaseguros son aversos al riesgo, y por tanto, llevan a cabo sus operaciones movidos por funciones de utilidad cóncavas.

Sin embargo, dicha teoría no se puede aplicar fácilmente a la resolución de problemas reales, debido a la dificultad de construir en la práctica las funciones de utilidad, a pesar de esto, la compatibilidad con esta teoría se mantiene, no obstante, como un requisito deseable que deberían cumplir las medidas del riesgo que efectivamente se utilicen para la resolución de los problemas reales.

En realidad, lo que se desea es asignar un número que en cierto sentido, cuantifique o mida el riesgo, y por supuesto, que luego nos permita comparar dos o más número de variables aleatorias. Una función que asigna un número a una cierta clase de variables aleatorias es a lo que se llamará *medida del riesgo* (ρ). Las medidas del riesgo son a menudo utilizadas como una herramienta de gestión para limitar la cantidad de riesgo que un área dentro de una entidad puede tomar.

Abandonando la teoría económica y viendo los riesgos financieros y actuariales, se observa que desde que las aseguradoras están preocupadas principalmente por las pérdidas (y cubrir las pérdidas sufridas), las medidas del riesgo en seguros son casi siempre enfocadas a la baja. Los actuarios han estado definiendo en los últimos años medidas del riesgo cada vez que asignan una prima a una variable aleatoria, la cual representa los beneficios pagados por un contrato de seguro. En efecto, definir un principio de cálculo de primas es establecer una forma de asignar un número real P (la prima) a cada riesgo actuarial X (la cuantía aleatoria de los siniestros de una póliza o una cartera de pólizas), de forma tal que, riesgos más peligrosos tengan asociadas primas más grandes. La identificación de la prima con una medida del riesgo resulta entonces evidente.

La *prima pura* o esperanza matemática de la siniestralidad $P = E[X]$, no es una buena elección, ya que únicamente protege contra la siniestralidad promedio y deja a la empresa indefensa frente a las desviaciones excesivas e imprevistas de dicha siniestralidad. Para protegerse frente a las oscilaciones de la siniestralidad, se han estado definiendo diversos tipos de *Primas Recargadas*, definidas éstas como la prima pura más un determinado recargo de seguridad no negativo, y que constituyen legítimas medidas del riesgo.

Si nos centramos ahora en las medidas “clásicas” del riesgo de los problemas financieros, debemos comenzar por la primera edición del *Análisis de Seguridad* realizado en 1934, en el cual Ben Graham se opuso a las medidas del riesgo basadas en los precios del pasado (como la volatilidad), teniendo en cuenta que la disminución de los precios puede ser temporal y no refleja el verdadero valor de una empresa.

También sostuvo que el riesgo viene de pagar un precio demasiado alto para un título, con relación en su valor y que los inversores deben mantener un “margen de seguridad” comprando títulos por menos de su valor real.

La creencia de que la diversificación era beneficiosa para los inversores, ya estaba bien planteada antes de que el Premio Nobel Harry Markowitz dirigiera su atención a ésta en 1952. A partir de 1909 se utilizaron las correlaciones entre los valores, creando así el argumento de que los inversores debían extender sus apuestas, y de que una cartera diversificada sería menos riesgosa que invertir en un título individual, generando rendimientos similares. Sin embargo, Markowitz cambió la manera de pensar acerca del riesgo, mediante la vinculación del riesgo de una cartera con el co-movimiento de los activos individuales de esa cartera, es decir, demostró que, para funciones de utilidad habituales y carteras con igual rentabilidad esperada, a menor desviación típica más utilidad, y por lo tanto, una mejor cartera; con esto justifica de manera teórica la utilización de la desviación típica de la rentabilidad como medida del riesgo en una inversión.

Pese a la enorme popularidad de los modelos en los cuales el riesgo se mide con varianzas o desviaciones típicas, estas medidas presentan graves problemas. En primer lugar, las medidas son compatibles con las funciones de utilidad cuando las rentabilidades son normales o logarítmico normales, pero no lo son cuando las distribuciones de probabilidad tienen fuertes asimetrías, valores extremos o “colas pesadas”, como sucede cuando se trabaja con problemas reales. La varianza y la desviación típica son medidas de las desviaciones respecto a la media en ambas direcciones (en la dirección favorable y en la dirección desfavorable), por exceso y por defecto, lo cual puede plantear contradicciones en algunos casos.

Este problema no es grave cuando nos basamos en distribuciones gaussianas, que son simétricas respecto a la media, pero puede ser muy grave cuando nos enfrentamos a las distribuciones del mundo real. Para resolverlo podemos acudir a otras medidas como *semidesviaciones típicas* o *semivarianzas*, que sólo miden la variabilidad desfavorable. Aunque siguen midiendo una variabilidad, que no es exactamente lo mismo que el riesgo de una pérdida.

El trabajo de Markowitz fue generalizado posteriormente por el también Premio Nobel William Sharpe (1964) y su *Capital Asset Pricing Model* (CAPM, *Modelo de Valoración de Activos Financieros*). En este modelo se definen las nociones de *riesgo sistemático* (de mercado) y *riesgo específico* (no sistemático), también medidos mediante varianzas; y las *Betas* de los activos (esencialmente covarianzas entre sus rentabilidades y la rentabilidad del mercado). De nuevo nos encontramos con varianzas y covarianzas que sólo adquieren pleno sentido en un mundo gaussiano.

La desviación típica y la varianza también han sido utilizadas como medidas del riesgo en problemas actuariales (por ejemplo, el problema del reaseguro óptimo), en donde están sujetas a las mismas críticas. Aunque probablemente la medida del riesgo más utilizada en este contexto sea la *probabilidad de ruina*, o probabilidad de que las reservas lleguen a estar por debajo de un cierto nivel establecido previamente y que se

identifica con la ruina de la empresa aseguradora. En su versión estática (relativa a un horizonte temporal fijo), la probabilidad de ruina proporciona exactamente la misma información que el Valor en Riesgo (VaR).

Una segunda agrupación de medidas “clásicas” del riesgo en problemas financieros es:

El *enfoque de cantidad nominal*, el riesgo de una cartera es definido como la suma de los valores nominales de los títulos individuales de la cartera, donde cada valor nominal puede ser ponderado por un factor que representa una valoración del grado de riesgo de la clase de activos de la que es parte el título.

Las *Medidas de Sensibilidad*, que miden la sensibilidad de la variable que nos interesa frente a pequeñas variaciones en los valores de otras variables de las que depende aquella. Quizás la más conocida sea la *Duration* de una cartera de bonos (Macaulay, 1938), se conoce como una medida local de sensibilidad del precio del activo financiero a movimientos de la tasa de interés, y matemáticamente, es la primera derivada del precio de un bono con respecto a la tasa de interés. La principal ventaja de esta medida es su fácil obtención.

Otro ejemplo famoso son las *Griegas* de una cartera de derivados, que se definen como la sensibilidad (la derivada parcial) del precio de la cartera respecto de los valores de otras variables como el precio del subyacente (δ , *Delta*), el paso del tiempo (θ , *Theta*), el tipo de interés (ρ , *Ro*) y la volatilidad del subyacente (v , *Vega*). También hay medidas de sensibilidad que son derivadas segundas, como la *Convexidad*, en el caso del riesgo de tipos de interés, o la derivada de Delta respecto al precio del subyacente (Γ , *Gamma*).

Las medidas de sensibilidad proporcionan abundante información sobre los riesgos a que está expuesta una institución financiera, pero no proporcionan una medida del riesgo global al que está expuesta la institución.

En las *Medidas del riesgo basadas en Escenarios* se tiene en cuenta una serie de posibles futuros cambios en los factores de riesgo (escenarios): por ejemplo, un aumento de 10% en las tasas de cambio o una caída simultánea de 20% en los principales índices bursátiles o un aumento simultáneo de las tasas de interés en todo el mundo. El riesgo de la cartera se mide como la pérdida máxima de la cartera bajo todos los escenarios, donde ciertos escenarios extremos pueden ponderarse a la baja para mitigar sus efectos en el resultado.

Dichas medidas son una muy útil herramienta de medición de riesgos para las carteras expuestas a un conjunto relativamente pequeño de factores de riesgo. El problema principal es, por supuesto, determinar un conjunto apropiado de escenarios y sus factores de ponderación. Además que resulta difícil hacer una comparación entre carteras que están afectadas por diferentes factores de riesgo.

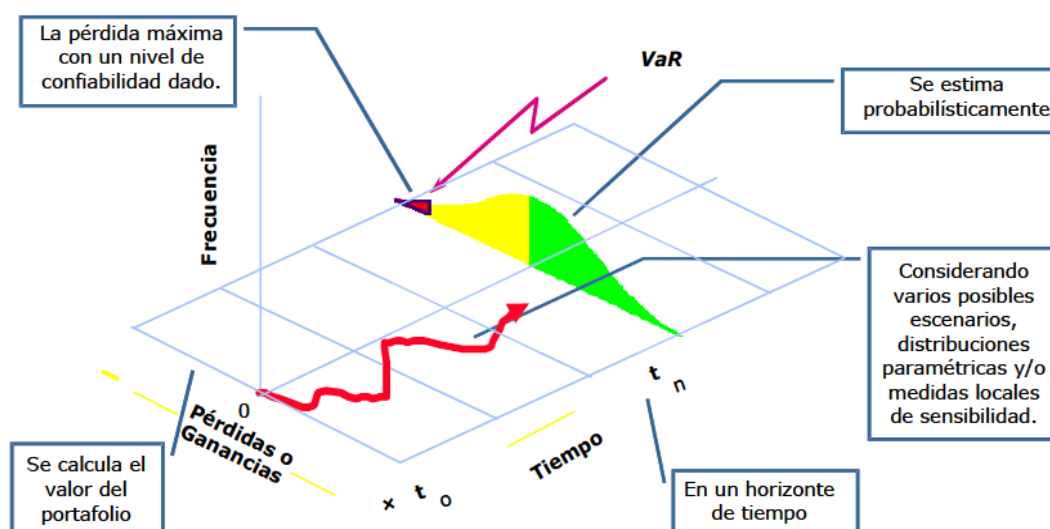
A finales de los años sesenta e inicios de los setenta, existe un periodo, donde se tuvieron importantes desarrollos, estos fueron iniciados por Robert Merton, Fisher

Black y Myron Scholes, y pueden ser llamados “modelos en tiempo continuo”. Dichos modelos permiten abordar muchos problemas asociados con la valoración de derivados simples o tipo *vanilla*, como también derivados complejos o exóticos.

Yaari (1987) y Wang (1996) plantean las *Medidas del riesgo basadas en Distorsiones* las cuales consisten en el valor esperado de una variable aleatoria bajo la probabilidad distorsionada (alterada); proponen calcular la prima de riesgo ajustada, comenzando con una distribución de probabilidad del riesgo, distorsionando su función acumulativa, y por último, calculando la esperanza de dicho riesgo con respecto a la probabilidad distorsionada. El tomador de decisiones que utiliza este tipo de medidas lo hace porque quiere maximizar la expectativa distorsionada de su riqueza. Dichas medidas son contrarias a las ideas planteadas por la *Teoría de la Utilidad Esperada* porque en lugar de utilizar una función de utilidad utilizan una función de distorsión, es decir, las funciones de distorsión modifican la probabilidad y mantienen la función de riqueza inalterada, mientras que las funciones de utilidad modifican la riqueza y mantienen la probabilidad invariable.

A mitad de los años noventa, la búsqueda de medidas globales del riesgo adecuadas pasó a estar motivada por la cuantificación correcta de las reservas de capital. La *medida global del riesgo o medida del riesgo basada en la distribución de pérdidas*, recomendada por el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria en abril de 1995, fue el denominado *Valor en Riesgo* (VaR, *Value at Risk*), definido simplemente como un percentil de la variable aleatoria que identificamos con el riesgo. Dado un horizonte temporal (250 días hábiles, y un período de tenencia de 10 días) y un nivel de confianza ($\alpha=99\%$), el VaR es el nivel de máxima pérdida que puede ocurrir durante ese periodo, cuyo valor estamos seguros que no se sobrepasará con el nivel de confianza dado. Es decir, el VaR es la menos mala de las $(1-\alpha)100\%$ pérdidas más grandes de la distribución de pérdidas y ganancias, así se tiene la idea de que la pérdida en una inversión no excederá el VaR con probabilidad α .

Figura III.1 VaR



Fuente: Banco de México

El VaR es fácil de calcular en el supuesto de normalidad de la distribución de probabilidad, ya que en este caso se reduce a una expresión que depende de la media y la varianza de la distribución. Los tres métodos más comunes de cálculo son: correlación, simulación histórica y simulación de Monte Carlo. Sin embargo, el VaR no tiene en cuenta lo que sucede en la cola de la distribución, en donde la probabilidad puede estar distribuida de muchas formas, y además puede desalentar la diversificación de las inversiones.

Medidas alternativas con mejores propiedades que el VaR han resultado ser: *Conditional Value at Risk* (CVaR), *Expected Regret* (ER), *Expected shortfall* (ES), *Conditional Tail Expectation* (CTE), *Tail Mean* (TM), *Worst Conditional Expectation* (WCE), y las *medidas del riesgo espectrales*. De todas las *medidas alternativas*, la más conocida es el CVaR (Valor en Riesgo Condicional), definido como la esperanza matemática de la pérdida, condicionada a que dicha pérdida sea mayor que el VaR. El CVaR mide la pérdida esperada en caso de que las cosas vayan mal.

Las propiedades del CVaR son mucho mejores que las del VaR. En efecto, a diferencia del VaR, CVaR siempre reconoce que la diversificación reduce el riesgo de las inversiones. En el cálculo del CVaR interviene, además, toda la cola de la distribución, o de manera equivalente todos los VaR asociados con niveles de significación superiores al inicial, de hecho, el CVaR también se puede definir como la esperanza matemática de todos estos VaR (aunque en este caso es más común denominarle AVaR). Finalmente, el CVaR es compatible con la *Dominancia Estocástica de Segundo Orden* (si todos los agentes aversos al riesgo prefieren un determinado riesgo a otro, el CVaR del primero debe ser menor que el del segundo), mientras que el VaR no lo es. En este sentido, las decisiones que buscan conseguir un CVaR mínimo son compatibles con la *Teoría de la Utilidad Esperada*. El precio que se paga por todas estas buenas propiedades teóricas es una mayor dificultad en el cálculo.

Tal vez la diferencia más importante, entre las modernas medidas del riesgo y las medidas tradicionales, es que las primeras se encuentran axiomatizadas. Es decir, se parte de conjuntos de axiomas que razonablemente se deben cumplir en el problema que se estudia, para posteriormente encontrar los tipos de medidas que verifican los axiomas, así como el resto de sus propiedades. Esta nueva metodología axiomática fue inaugurada en el campo de las finanzas por el Sistema de Pedersen y Satchell en 1998, aunque el enfoque más influyente ha sido el famoso artículo de Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999), en el que proponían cuatro axiomas los cuales, en su opinión, deberían caracterizar las medidas del riesgo cuando éstas se usan para el cálculo de los requerimientos de capital, es decir, el capital que debe ser añadido a una posición financiera para que su riesgo resulte aceptable.

Hay una diferencia en las propiedades deseables cuando éstas se consideran para una medida del riesgo, para la asignación de capital, para los propósitos de regulación o para las primas. En el campo actuarial estos cuatro axiomas fueron introducidos independientemente por Wang, Panjer y Young en 1997 (sin tener en cuenta los gastos operativos y los ingresos por inversiones), y son:

- *Monotonicidad*: si una cartera siempre tiene una siniestralidad mayor que otra, el riesgo de la primera debe ser mayor, es decir, $X(\omega) \leq Y(\omega), \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- *Invariancia ante traslaciones*: si añadimos una cuantía constante c a la siniestralidad, el riesgo aumenta en lugar de disminuir, es decir: $\rho(X + c) = \rho(X) + c$
- *Homogeneidad positiva*: si se modifica el tamaño de una cartera multiplicándola por un determinado factor $\alpha > 0$, el riesgo también se multiplica por dicho factor. Es decir: $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$
- *Subaditividad*: la diversificación reduce el riesgo, es decir: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Las medidas del riesgo que verifican estos cuatro axiomas se denominan *Medidas Coherentes*. El VaR no es una medida coherente, ya que no satisface la condición de subaditividad, únicamente bajo distribuciones elípticas como en el caso de la normal; en cambio, el CVaR sí lo es. Si consideramos medias ponderadas en lugar de la media aritmética, obtendremos las llamadas *Medidas Espectrales del Riesgo*, Acerbi (2002).

Las cuatro propiedades que definen las medidas coherentes han tenido cierta polémica en el campo actuarial, ya que algunos autores afirman que en ciertos casos se requieren propiedades mucho más complejas. No parece que sea razonable exigir a un conjunto particular de axiomas que se mantenga en todas las situaciones de riesgo, sin tener en cuenta el capital económico disponible o la estructura de dependencia entre variables aleatorias.

En especial se hacen críticas a dos propiedades, en primer lugar, el axioma de homogeneidad positiva, algunos argumentan que el aumento del tamaño de la cartera puede incrementar el riesgo de liquidez de forma más que proporcional. Las pérdidas de las carteras muy grandes pueden ser también enormes, y puede ser difícil a corto plazo encontrar la liquidez suficiente para hacer frente a las obligaciones de pago. En tal caso, tendríamos que $\rho(\alpha X) > \alpha \rho(X)$.

En segundo lugar, la subaditividad, algunos la defienden con ahínco (Wang et al., 1997), para ellos no tiene sentido que se pueda disminuir el riesgo (y los requerimientos de capital) simplemente dividiendo la cartera en subcarteras. Dhaene, Goovaerts y Kaas (2003) defienden que al mezclar en una cartera riesgos dependientes positivamente, el riesgo resultante es mayor que la suma de los riesgos si los consideramos independientemente unos de otros. La relación de dependencia positiva más fuerte se denomina *comonotonía*. Dos riesgos son comonótonos cuando se pueden obtener a partir de un tercero mediante funciones no decrecientes. Un caso claro de comonotonía es el reaseguro: la siniestralidad retenida y la siniestralidad cedida son riesgos comonótonos, pues ambos dependen de la siniestralidad total antes de reaseguro.

En suma, Dhaene et al. defienden la subaditividad para riesgos negativamente dependientes, la aditividad para riesgos independientes y la superaditividad para riesgos positivamente dependientes en general, y comonótonos en particular. Una medida del riesgo que verifica estas propiedades (y que no verifica la propiedad de homogeneidad positiva) es el *principio exponencial de cálculo de primas*, que veremos posteriormente. También argumentan que no hay conjuntos de axiomas de validez general para todos los tipos de situaciones de riesgo, y es así como manifiestan que muchas de las medidas del riesgo y principios de primas pueden ser derivadas de la minimización de un límite de Markov para la probabilidad de la cola.

Otra posible forma de enfrentar estos problemas consiste en sustituir los axiomas de homogeneidad positiva y subaditividad por un axioma más débil que los englobe como casos particulares. Föllmer y Schied (2002) proponen que éste sea el *Axioma de Convexidad*:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

La convexidad significa que la diversificación no aumenta el riesgo, ya que el riesgo diversificado de $\lambda X + (1-\lambda)Y$ es menor o igual que la media reponderada de los riesgos individuales. Entonces las medidas que verifican los axiomas de monotonicidad, invariancia por traslaciones y convexidad se denominarán *Medidas del Riesgo Convexas*; cabe destacar que toda medida coherente es convexa pero no toda medida convexa es coherente.

En los últimos años, hay un reciente interés en el tema de las *Medidas del riesgo Multiperíodo*, las cuales toman en cuenta la evolución del valor final de una posición sobre varios períodos de tiempo y consideran el efecto de la información y acciones intermedias, (Riedel (2004), Weber (2004) y Artzner et al. (2005)).

Además de los antes vistos, la literatura contiene otros conjuntos alternativos de axiomas que pueden resultar útiles para la modelización del riesgo en distintos tipos de problemas. Por ejemplo, las llamadas *Medidas del riesgo Acotadas por la Media* verifican los axiomas de invariancia por traslaciones, homogeneidad positiva y subaditividad, junto con el axioma adicional de acotación por la media (para el caso actuarial):

$$\begin{aligned} \rho(X) &> E(X) && \text{para } X \text{ no constante} \\ \rho(X) &= E(X) && \text{para } X \text{ constante} \end{aligned}$$

En el campo actuarial si se asume la prima dada π entonces se debe considerar a X como $X = C_0 + \pi - S$, donde C_0 es el capital inicial y S la siniestralidad acumulada que es mayor o igual a cero.

Si además se cumple el axioma de monotonicidad, entonces se tendría una *Medida del riesgo Coherente Acotada por la Media*.

Del mismo modo, se tienen las *Medidas de Desviación* que verifican los axiomas de homogeneidad positiva y subaditividad, junto con los dos adicionales siguientes:

$$D(X + c) = D(X) \quad \text{siendo } c \text{ una constante}$$

$$D(X) \geq 0, \forall X; D(0) = 0; D(X) > 0 \quad \text{si } X \text{ no es constante}$$

Las desviaciones y semidesviaciones típicas y absolutas son ejemplos de medidas de desviación, no así la varianza, la cual no verifica la propiedad de subaditividad. En realidad, las medidas de desviación no miden el riesgo de pérdidas sino la variabilidad (volatilidad) de la variable, ambos son conceptos diferentes. Sin embargo, dichas medidas se han utilizado a menudo en problemas actuariales como medidas del riesgo.

Se puede demostrar que una medida del riesgo acotada por la media genera una medida de desviación y viceversa, (Rockafellar et al., 2006). Aunque, las medidas de desviación no son medidas coherentes en el sentido de Artzner et al. (1999). Ambos tipos pueden ser útiles para calcular primas recargadas en problemas actuariales de tarificación.

3.1 Principios de cálculo de primas

La base de los principios de cálculo de primas fue establecido por Bühlmann (1970) quien introdujo la prima de utilidad-cero, Gerber (1979) y de forma global por Goovaerts et al. (1984). Los principios de cálculo de primas son las medidas del riesgo más comunes en la ciencia actuarial, de hecho, tienen que expresar la posición de la aseguradora sobre el riesgo que asume.

En términos generales, un *principio de cálculo de prima* es una regla (mapeo del conjunto de los riesgos a los números reales) o función π que asigna a cada variable aleatoria X que representa una pérdida, un número $\pi(X)$, que será la prima que se cobra por aceptar el riesgo X . Esta definición es aplicable a los contratos adquiridos por una prima única, en lugar de por primas periódicas; dejando de lado el recargo por pérdidas y ganancias.

El problema del cálculo de la prima es una de las cuestiones clave en el negocio de seguros: si la tasa de la prima es demasiado alta, una aseguradora no tendrá suficientes clientes para una operación exitosa. Si la tasa de la prima es demasiado baja, la aseguradora tampoco podrá tener fondos suficientes para pagar todas las reclamaciones, y entonces, la ruina será segura. Dado esto, para mantener la probabilidad de ruina restringida se considera una medida del riesgo para el cálculo de las primas, el cual incluye un recargo de seguridad, y sea suficiente para cubrir las reclamaciones y aumentar el superávit esperado, lo suficiente, para que la entidad se considere estable.

Se podría argumentar que una medida del riesgo es un concepto más amplio que un principio de cálculo de prima, ya que para la cuantificación del riesgo se requiere una medida del riesgo que convierta la ganancia o pérdida aleatoria futura en un equivalente de certeza que se pueda utilizar para ordenar los diferentes riesgos y/o

para la toma de decisiones. Esto se hace especificando las distribuciones de probabilidad de los riesgos involucrados y aplicando una función de preferencia a estas distribuciones; este proceso implica supuestos estadísticos y económicos. Sin embargo, con el fin de determinar una prima a un riesgo es necesario convertir la ganancia o pérdida aleatoria futuras en términos financieros. Así, una medida de riesgo no es un principio de cálculo de prima porque se asume que las primas se expresan en unidades monetarias.

Cuando se aplican las medidas del riesgo como principios de cálculo de primas, las medidas del riesgo coherentes llegan a ser peligrosas, especialmente en el caso de riesgos catastróficos cuando se encuentran reclamaciones de gran cuantía y riesgos fuertemente dependientes. En este caso, la deficiencia de coherencia más importante está haciendo caso omiso del capital de riesgo disponible y como consecuencia, le corresponde una probabilidad de ruina. En estos casos se debe ser muy cauteloso con las medidas del riesgo que son subaditivas para riesgos comonótonos (en el caso extremo, aditivas) y/u homogéneas positivamente (en general, en el caso de las primas de seguros se debe imponer la condición de superaditividad para todos los pares posibles de riesgos comonótonos).

Tomando en cuenta lo anterior existen dos medidas del riesgo ampliamente utilizadas en la práctica:

$$\begin{aligned}\pi(X) &= E(X) + \alpha\sigma(X) \quad \text{y} \\ \pi(X) &= E(X) + \beta\text{Var}(X)\end{aligned}$$

las cuales como se ha visto, no preservan la dominancia estocástica, así que por lo general, no se deben utilizar como principios de cálculo de primas.

Un principio de cálculo de prima es considerado a menudo como el “precio” de un riesgo (o de la cola de un riesgo en reaseguro), como el valor de una reserva estocástica, o como una indicación de la pérdida máxima probable. Esto lleva a la *ordenación de los riesgos* que se ha desarrollado recientemente en la literatura actuarial.

El flujo de prima debe garantizar el pago de las reclamaciones, pero por otro lado, las primas deben ser competitivas. Una de las formas más utilizadas en el cálculo de π en el intervalo $[0, t]$ está dada por $\pi(t) = (1 + \theta)E(S(t))E(X)$, donde X es una variable aleatoria con la misma distribución que X_i (monto de la demanda agregada hasta el tiempo t), y θ es el *coeficiente de recargo de seguridad*. Esta fórmula dice que el ingreso promedio de la prima debe ser mayor que la suma promedio del pago de las reclamaciones. Si son iguales, entonces dicha prima se llama *prima neta* y su método de cálculo se conoce como el principio de equivalencia.

El cálculo de la prima adecuada consiste en la construcción del proceso $\pi(t)$ dada $S_X(t)$, la función de distribución del proceso de riesgo. En este caso vamos a escribir $\pi(S_X)$ o, simplemente $\pi(X)$.

Existen tres métodos que se utilizan para desarrollar los principios de cálculo de primas:

1. *Método ad hoc*: se llama así porque dentro de él se define un principio de cálculo de prima (potencialmente) razonable, y después se determina cuáles de una lista de propiedades deseables satisface su principio.
2. *Método de caracterización*: es un método más riguroso porque dentro de éste, se especifica una lista de propiedades, las cuales quiere que el principio de cálculo de prima satisfaga y, a continuación se encuentra dicho principio (o conjunto de principios).
3. *Método económico*: es quizás el método más riguroso que se puede utilizar para desarrollar un principio de cálculo de prima. Dentro de este método, se adopta una teoría económica en particular y luego se determina el principio de cálculo de prima resultante.

Algunos principios de cálculo de prima surgen de más de uno de los métodos anteriores, ya que estos métodos no son mutuamente excluyentes.

La notación que se utiliza para definir cada propiedad de los principios de cálculo de primas será:

Sea χ que denota el conjunto de variables aleatorias no negativas en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , nuestra colección de variables aleatorias de seguro (pérdida), también llamados riesgos del seguro. Sean X, Y, Z , etc. los típicos miembros de χ . Y finalmente, π denota el principio cálculo de prima, o la función que va de χ al conjunto (extendido) de los números reales no negativos, así es posible que $\pi[X]$ tome el valor de ∞ .

Se tienen las siguientes propiedades:

1. *Independencia (Independence/ law invariance/ objectivity)*: $\pi[X]$ sólo depende de la función de distribución no acumulativa de X , es decir, S_X , donde $S_X(t) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) > t\}$. Esto es que la prima de X depende sólo de las probabilidades de la cola de X .
Es decir, esta propiedad establece que la prima depende sólo de la pérdida monetaria del evento asegurable y de la probabilidad de que ésta se produzca, no de la causa de dicha pérdida monetaria.
2. *Recargo sobre el riesgo (risk loading)*: $\pi[X] \geq E(X)$ para todos $X \in \chi$. Un recargo sobre el riesgo es deseable debido a que generalmente se requiere una regla sobre la prima para cobrar, por lo menos, el pago previsto del riesgo X , es decir $E(X)$, a cambio de asegurar el riesgo. De lo contrario, la aseguradora perdería dinero.

3. *Recargo sobre el riesgo no justificado (no unjustified risk loading)*: Si el riesgo $X \in \chi$ es idénticamente igual a una constante $c \geq 0$, entonces $\pi[X] = c$ o $\pi[c] = c$.

A diferencia de la propiedad 2, si se sabe a ciencia cierta (con probabilidad 1) que el pago del seguro es c , entonces no se tiene ninguna razón para imputar un recargo sobre el riesgo porque no hay incertidumbre en cuanto al pago.

En particular $\pi[0] = 0$, la cantidad $\pi[X]$ puede interpretarse como un margen requerido, es decir, el capital mínimo que si se añade a X al inicio del período y se invierte en un activo libre de riesgo, hace a X “aceptable”.

4. *Pérdida máxima (maximal loss/ non-excessive loading/ no rip-off)*: $\pi[X] \leq \text{supremo esencial } [X]$ para todo $X \in \chi$. Se ve que es inútil mantener más capital que el valor de la pérdida máxima.

5. *Traslación equivariante o traslación invariante (translation equivariance/ translation invariance/ translativity/ consistency)*: $\pi[X + a] = \pi[X] + a$ para todo $X \in \chi$ y todos $a \geq 0$.

Si se aumenta el riesgo X en una cantidad fija a , entonces la prima para $(X + a)$ debe ser la prima para X aumentado en esa cantidad fija a .

Implica la propiedad natural: $\pi[X - \pi[X]] = 0$, es decir, cuando agregamos $\pi[X]$ a la posición inicial $-X$, se obtiene una posición “neutral”.

6. *Escala equivariante o escala invariante (scale equivariance/ scale invariance/ positive homogeneity)*:

$\pi[bX] = b\pi[X]$ para todo $X \in \chi$ y todos los $b \geq 0$.

Esta propiedad también se conoce como la homogeneidad de grado uno en la literatura económica. Esencialmente establece que la prima para duplicar un riesgo es el doble de la prima del riesgo individual (por lo general se utiliza un argumento de no-arbitraje para justificar esta regla).

La escala equivariante podría no ser razonable si el riesgo X es grande y la aseguradora (o el mercado de seguros) experimenta limitaciones de excedentes.

7. *Aditividad (additivity)*: $\pi[X + Y] = \pi[X] + \pi[Y]$ para todo $X, Y \in \chi$.

Es una forma más fuerte de la propiedad 6 (se puede utilizar un argumento similar de no-arbitraje para justificar esta propiedad).

De hecho, cada prima que es una combinación lineal de momentos es aditiva.

8. *Subaditividad (subadditivity)*: $\pi[X + Y] \leq \pi[X] + \pi[Y]$ para todo $X, Y \in \chi$.

La subaditividad es una propiedad razonable, porque el argumento de no-arbitraje funciona bien para asegurar que la prima de la suma de dos riesgos no es mayor que la suma de las primas individuales; de lo contrario, simplemente el comprador del seguro sólo aseguraría los dos riesgos por separado.

La idea detrás de la subaditividad se puede resumir como una fusión que no crea un riesgo adicional. Esta propiedad refleja la idea de que el riesgo puede reducirse mediante la diversificación, el efecto de diversificación se define como la

diferencia entre la suma de las medidas del riesgo de riesgos independientes y la medida del riesgo de todos los riesgos tomados en conjunto, es decir,

$$\sum_{i=1}^n \pi[X_i] - \pi\left[\sum_{i=1}^n X_i\right].$$

El efecto de diversificación siempre es positivo para las medidas del riesgo subaditivas. El problema de asignación del riesgo consiste en repartir el efecto de la diversificación no-negativa de una cartera de riesgos de manera justa a sus componentes.

La subaditividad es una propiedad matemática muy conveniente, en la optimización de la cartera, la subaditividad y la homogeneidad positiva aseguran que la superficie de riesgo a minimizar en el espacio de las carteras es convexa. Sólo si las superficies son convexas van a estar siempre dotadas de un único mínimo absoluto, y sólo entonces el proceso de minimización del riesgo encontrará siempre una única y bien diversificada solución óptima.

9. *Superaditividad (superadditivity):* $\pi[X + Y] \geq \pi[X] + \pi[Y]$ para todo $X, Y \in \chi$.
La superaditividad podría ser una propiedad razonable de un principio de cálculo de prima si hay restricciones de excedentes, los cuales requieran que una aseguradora cobre un recargo sobre el riesgo, mayor que al que se cobra por asegurar riesgos grandes.
10. *Aditividad para riesgos independientes (additivity for independent risks):* $\pi[X + Y] = \pi[X] + \pi[Y]$ para todo $X, Y \in \chi$ tal que X e Y son independientes.
Algunos actuarios creen que la propiedad 8 es demasiado fuerte y que el argumento de no-arbitraje sólo aplica para los riesgos que son independientes. Ellos, evitan así el problema de las limitaciones de excedentes de los riesgos dependientes.
11. *Aditividad para riesgos comonótonos (additivity for comonotonic risks):* $\pi[X + Y] = \pi[X] + \pi[Y]$ para todo $X, Y \in \chi$ tal que X e Y son comonótonos.
Hay que tener en cuenta que esta propiedad implica a la propiedad 7, si π adicionalmente satisface una condición de continuidad.
La aditividad comonótona se justifica por el hecho de que poner juntos riesgos comonótonos nunca disminuye el riesgo del evento, los riesgos comonótonos son apuestas sobre el mismo evento y no pueden actuar como una cobertura contra la otra. Debido a la condición de ausencia de cobertura, las aseguradoras no están dispuestas a dar una reducción en el recargo sobre el riesgo para una política combinada.
12. *Iteratividad (iterativity):* $\pi[X] = \pi[\pi[X|Y]]$ para toda $X, Y \in \chi$.
La prima de X se puede calcular en dos pasos: primero aplicar $\pi[X]$ para la distribución condicional de X dado $Y = y$. La prima resultante es una función $\pi[Y]$. A continuación, se aplica el mismo principio de cálculo de prima para la variable aleatoria $\pi[X|Y] = \pi[Y]$.

Para la prima neta, la iteratividad es la propiedad para los valores esperados. De lo contrario, el criterio de iteratividad sería bastante artificial.

13. *Convexidad (convexity)*: π es convexo si $\pi[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \leq \alpha\pi[X] + (1 - \alpha)\pi[Y]$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.

A continuación, se presentan las propiedades de los principios de cálculo de primas que requieren que se preserve la ordenación común en los riesgos.

14. *Monotonicidad (monotonicity)*: Si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, entonces $\pi[X] \leq \pi[Y]$.

Donde \leq denota la desigualdad en el sentido de orden convexo, ésta es la condición más débil posible para la aversión al riesgo después de la Teoría de la Utilidad (los riesgos X e Y están ordenados en el sentido de orden convexo si todos los tomadores de decisiones aversos al riesgo prefieren el riesgo X al Y). Es decir, la monotonicidad dice que la cantidad de capital que se requiere como protección contra la pérdida X es siempre menor que la cantidad correspondiente a Y , cuando Y siempre supera a X . Es razonable suponer que en el caso del seguro, ambos, aseguradoras y asegurados son tomadores de decisiones aversos al riesgo, por lo que dicha propiedad para las primas se presenta con toda naturalidad.

15. *Conservación de la dominancia estocástica de primer orden (preserves first stochastic dominance (FSD) ordering)*: Si $S_X(t) \leq S_Y(t)$ para todo $t \geq 0$, entonces $\pi[X] \leq \pi[Y]$.

16. *Conservación del orden stop-loss (preserves stop-loss (SL) ordering)*: Si $E[X - d]_+ \leq E[Y - d]_+$ para todos los $d \geq 0$, entonces $\pi[X] \leq \pi[Y]$.

La propiedad 1 (independencia) junto con la propiedad 14, implican la propiedad 15. También, si π conserva el orden *stop-loss*, entonces π preserva la propiedad 15 porque el orden *stop-loss* es más débil. Estos ordenamientos se utilizan comúnmente en la ciencia actuarial para ordenar los riesgos (parcialmente), ya que éstos representan los ordenamientos comunes de los grupos de tomadores de decisiones.

Por último se tiene una característica técnica que es útil en la caracterización de ciertos principios de cálculo de primas.

17. *Continuidad (continuity)*: Sea $X \in \mathcal{X}$, entonces, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \pi[\max(X - a, 0)] = \pi[X]$, y $\lim_{a \rightarrow \infty} \pi[\min(X, a)] = \pi[X]$.

Las propiedades antes mencionadas son independientes (mutuamente excluyentes). Por ejemplo, si π es *monótona* no hay *recargo injustificado*, ya que $X \leq \max[X]$ siempre se mantiene.

Cabe señalar que, incluso los principios de cálculo de primas fallan generalmente al querer cumplir con todas las propiedades enumeradas anteriormente, a excepción del

principio de prima neta, ninguno de los principios considerados por Goovaerts, De Vijlder y Hazendonck (1984) cumple con *homogeneidad positiva* y *traslación*. El *Principio Holandés* introducido por Van Heerwaarden y Kaas (1992) es una excepción notable, ya que cumple estas dos propiedades.

La *subaditividad* y la *homogeneidad positiva* son objeto de debate. Si la *subaditividad* describe la realidad es discutible porque deja de lado la noción de riesgo residual por completo. Föllmer y Schied (2002) observaron que las propiedades de *homogeneidad positiva* y de *subaditividad* hacían a las medidas del riesgo insensibles al riesgo de liquidez. De acuerdo con Rootzén y Klüppelberg (1999), la subaditividad es una propiedad matemática conveniente que no se cumple en la realidad. Del mismo modo, las medidas del riesgo subaditivas llegan a ser incompatibles con la Teoría de la Utilidad esperada. La siguiente cuestión puede plantearse: dadas dos carteras X e Y y su distribución de probabilidad conjunta, ¿cómo se relaciona el riesgo de la suma ($X + Y$) con los riesgos de las posiciones individuales X e Y ? La respuesta podría estar relacionada con la forma en la que X e Y dependen estocásticamente una de la otra. La *aditividad comonótona* está en consonancia con este enfoque: si X e Y son perfectamente dependientes, entonces se puede garantizar un descuento de diversificación.

Otra escuela de pensamiento sostiene que la agregación de riesgos “positivamente dependientes” en realidad aumenta el riesgo de la cartera y esto debería inducir a mayores requerimientos de capital. Esto lleva a la *superaditividad de riesgos positivamente dependientes* y la *aditividad de riesgos independientes*.

Los diferentes tipos de principios de cálculo de primas que veremos serán de acuerdo al método *ad hoc*.

- *Principio de Prima Neta (net premium principle):*

$$\pi[X] = E(X).$$

Se define como el valor esperado de las pérdidas asociadas con el riesgo X . Se aplica extensamente en la literatura, porque los actuarios a menudo asumen que el riesgo es prácticamente inexistente si la aseguradora vende suficientes pólizas idénticamente distribuidas e independientes.

- *Principio de Valor Medio (mean value premium principle).*

Fue caracterizado por Hardy et al. (1952). Y es:

Sea X una variable de riesgo, la medida de valor del riesgo medio se obtiene como

la raíz de la ecuación $f(\pi) = E[f(X)] = \sqrt{E(X^2)} = \sqrt{(E(X))^2 + \text{Var}(X)}$, donde f es una función no decreciente y no negativa tal que $E[f(X)]$ converge.

- *Principio de Valor Esperado (expected value premium principle):*

$$\pi[X] = (1 + \lambda)E(X), \text{ para algunos } \lambda > 0.$$

Este principio se basa en el principio de prima neta, mediante la inclusión de un recargo proporcional sobre el riesgo.

- *Principio de Varianza (variance premium principle):*
 $\pi[X] = E(X) + \alpha \text{Var}(X)$, para alguna $\alpha > 0$.
 Éste también se basa en el principio de prima neta, incluyendo un recargo sobre el riesgo que es proporcional a la variación del riesgo.
- *Principio de Desviación Estándar (standard deviation premium principle):*
 $\pi[X] = E(X) + \beta \sqrt{\text{Var}(X)}$, para alguna $\beta > 0$.
 Este principio también se basa en el principio de prima neta, incluyendo un recargo sobre el riesgo que es proporcional a la desviación estándar del riesgo.

Denneberg (1989) expone que este principio debe ser reemplazado por el *Principio de la Desviación Absoluta*:

$$\pi(X) = E(X) + a\tau_X \text{ donde } \tau_X = E(|X - S_X^{-1}(1/2)|).$$

- *Principio Exponencial (exponential premium principle):*
 $\pi[X] = \frac{1}{\alpha} \ln E[e^{\alpha X}]$, para alguna $\alpha > 0$.
 Surge del principio de *utilidad equivalente* (por ver más adelante), cuando la función de utilidad es exponencial. Young y Zariphopoulou (2002), Young (2003), y Moore y Young (2003) utilizaron este principio de cálculo de primas para poner un precio a varios productos de seguros en un mercado dinámico.

Algunas características del principio exponencial son:

- Un principio de valor medio consistente es exponencial.
 - Un principio de valor medio aditivo es exponencial.
 - Un principio de utilidad-cero aditivo es exponencial.
 - Un principio de utilidad-cero iterativo es exponencial.
- *Principio de Esscher (Esscher premium principle):*
 Este principio fue introducido por Bühlmann (1980) como un caso especial de un principio de prima económica: él derivó la prima Esscher como una solución óptima de Pareto a la situación del mercado con riesgo de tipo de cambio, donde todos los riesgos son estocásticamente independientes y todos los agentes utilizan una función de utilidad exponencial.

El enfoque de Goovaerts, De Vijlder y Hazendonck (1984), quienes describieron la prima Esscher como el valor esperado del riesgo después de multiplicar su función de distribución por una función exponencial creciente y ponderada (que por supuesto hace al riesgo menos atractivo para la aseguradora). Teniendo en cuenta que ésta tiene que cubrir un riesgo de X , una aseguradora podría querer determinar la prima π mediante la maximización de la utilidad de la póliza, $E[u(\pi - X)]$. Por supuesto, esto conduce a $\pi = +\infty$ porque u es creciente. Suponiendo que la aseguradora se compromete a limitar su elección por una prima de la forma

$$\pi = E[Xw(X)]$$

para alguna función w y que su función de utilidad es de la forma

$$u(x) = \frac{1 - e^{-cx}}{c}.$$

La constante $c > 0$ es igual a $-\frac{d}{dx} \ln u$ y mide la aversión al riesgo de la aseguradora; la función de utilidad exponencial presentada produce una aversión al riesgo constante.

La maximización de $E[u(\pi - X)]$ con π y u de la forma antes definida sobre todas las funciones w crecientes continuas tal que $E[w(X)] = 1$ produce

$$w(x) = \frac{e^{cx}}{M_X(c)}.$$

Con lo cual se tiene una prima igual a

$$E[Xw(X)] = E\left[X \frac{e^{cx}}{M_X(c)}\right] = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{cx} f_X(x)}{M_X(c)} dx.$$

Así pues, se ha operado una nueva ponderación de la función de distribución f_X transformándola en $w(X) f_X(x)$. La función ponderada w pone más masa en los valores grandes de X , y por lo tanto, implica un recargo sobre el riesgo. Esto produce la siguiente definición: el principio de cálculo de primas Esscher $Es[X; c]$ está dado por π con la función ponderada w . Más precisamente, la prima Esscher para el riesgo X es:

$$Es[X; c] = \frac{E[Xe^{cx}]}{M_X(c)} = \frac{d}{dc} \ln M_X(c).$$

Es decir,

$$\pi[X] = \frac{E[Xe^Z]}{E[e^Z]}$$

para alguna variable aleatoria $Z = cX$, $c > 0$.

- *Principio de Utilidad Equivalente (equivalent utility premium principle):*
 $\pi[X]$ resuelve la ecuación

$$u(w) = E[u(w - X + \pi)]$$

donde u es una utilidad de riqueza (de la aseguradora) creciente y cóncava, y w es la riqueza inicial (de la aseguradora).

Se puede pensar en π como la prima mínima que la aseguradora está dispuesta a aceptar a cambio de cubrir el riesgo X . En el lado izquierdo de la ecuación, se tiene la utilidad de la aseguradora que no acepta el riesgo del seguro. En el lado derecho, se tiene la utilidad esperada de la aseguradora que acepta el riesgo del seguro por una prima de π . Si $\pi[X]$ es tal que la aseguradora es *indiferente* entre no aceptar y aceptar el riesgo del seguro, esta prima se llama el *precio de indiferencia* de la

aseguradora. Los economistas se refieren a este precio como el *precio de reserva* de la aseguradora.

Pratt (1964) estudió cómo los precios de reserva cambiaban, como uno de los cambios de aversión al riesgo, según se definan por la función de utilidad. Pratt mostró que para los riesgos “pequeños”, el *principio de varianza*, se aproxima a la prima del *principio de utilidad equivalente* con $\alpha = -(1/2)(u''(w)/u'(w))$, es decir, el factor de recargo es igual a la mitad de la medida de aversión al riesgo absoluta. Si $u(w) = -e^{-\alpha w}$, para alguna $\alpha > 0$, entonces tenemos el *principio exponencial*.

Alternativamente, si u y w representan la función de utilidad y la riqueza de un comprador de seguros, entonces la prima máxima que el comprador está dispuesto a pagar por la cobertura es la solución G de la ecuación $E[u(w - X)] = u(w - G)$. La prima resultante $G[X]$ es el precio de indiferencia para el comprador de seguros, que es indiferente entre no comprar y comprar un seguro a la prima $G[X]$.

- *Principio de Utilidad-Cero (zero-utility premium principle):*
Considerando a una aseguradora con una riqueza inicial w y con una función de utilidad u . La entidad cubre un riesgo X y fija su precio para la cobertura $\pi[X]$ como la solución de la siguiente ecuación de indiferencia:

$$E[u(w + \pi[X] - X)] = u(w).$$

La anterior condición expresa el hecho de que la prima $\pi[X]$ está en términos de utilidad: el lado derecho representa la utilidad de la no emisión de la póliza, y el lado izquierdo representa la utilidad esperada de la aseguradora asumiendo la pérdida financiera aleatoria X . Por lo tanto, la ecuación significa que la utilidad esperada de la riqueza con la póliza es igual a la utilidad sin ella.

Poniendo $w = 0$, obtenemos el llamado principio de utilidad-cero propuesto por Bühlmann (1970): la prima de $\pi[X]$ calculada de acuerdo con este principio es la raíz de la ecuación

$$E[u(\pi[X] - X)] = u(0)$$

que se puede interpretar como una igualdad entre la utilidad esperada de la renta $(\pi[X] - X)$ y la utilidad de no aceptar el riesgo.

La prima de utilidad-cero $\pi[X]$ se define como la solución a la anterior ecuación implícita; ninguna solución explícita se encuentra disponible en general. Se asume sin pérdida de generalidad que u ha sido normalizada de tal manera que $u(0) = 0$ y $u'(0) = 1$. Debido a que u es no decreciente, tenemos

$$0 = E[u(\pi[X] - X)] \leq u(\pi[X] - \max[X])$$

para que $(\pi[X] \leq \max[X])$ se mantenga, y las primas de utilidad-cero satisfagan la condición de pérdida máxima. Además, si u es cóncava entonces la desigualdad de Jensen asegura que

$$0 = E[u(\pi[X] - X)] \leq u(\pi[X] - E[X])$$

para que $(\pi[X] \geq E[X])$ y las primas de utilidad-cero contengan un recargo no negativo. Las primas de utilidad-cero satisfacen claramente la traslación. Sin embargo, no son positivamente homogéneas en general.

- *Principio de Wang (Wang's Premium Principle):*

$\pi[X] = \int_0^\infty g[S_X(t)] dt$, donde g es una función creciente y cóncava que va del $[0, 1]$ al $[0, 1]$.

A la función g se le conoce como una *distorsión* y a $g[S_X(t)]$ se le llama una probabilidad (de la cola) distorsionada.

El *principio de cálculo de primas de Azar Proporcional*, es un caso especial del principio de Wang con la función de distorsión g dada por $g(p) = p^c$ para $0 < c < 1$.

El principio de Wang se relaciona con la idea de las medidas del riesgo coherentes (vistas anteriormente), y se basa en la teoría dual del riesgo de Yaari (1987). Se puede combinar el principio de utilidad equivalente y el principio de Wang para obtener primas basadas en la *utilidad esperada*.

Dicho principio tiene las siguientes propiedades:

- La medida de riesgo Wang ρ_g es *no rip-off*, positivamente homogénea, traslativa, monótona y comonótona aditiva, esto se puede probar considerando que el VaR posee las mismas propiedades y que cualquier ρ_g puede ser representada como una mezcla de VaRs.
- También es subaditiva si, y sólo si, g es cóncava.

- *Principio de Azar Proporcional (proportional hazards premium principle):*

$\pi[X] = \int_0^\infty [S_X(t)]^c dt$, para algún $0 < c < 1$.

Como se ha dicho, este principio es un caso especial del principio de Wang. El enfoque de la transformación de azar proporcional para medir el riesgo fue propuesto por Wang en 1995, que puede ser interpretado como una medida de riesgo ajustada al riesgo, donde c es el índice de aversión al riesgo. Claramente, la función S_c^* definida como $S_c^*(t) = (S_X(t))^c$ es una función de la cola.

- *Principio Suizo (swiss premium principle):*

La prima de π resuelve la ecuación $E[u(X - p\pi)] = u((1 - p)\pi)$ para algún $p \in [0, 1]$ y alguna función u creciente y convexa.

El principio suizo de cálculo de primas lo introdujo Gerber (1974) para meter el principio del valor medio y el principio de utilidad-cero en un marco unificado.

- *Principio Holandés (dutch premium principle):*
 $\pi[X] = E(X) + \theta E[(X - \alpha EX)_+]$, con $\alpha \geq 1$ y $0 < \theta \leq 1$.
 Van Heerwaarden y Kaas (1992) introdujeron este principio de cálculo de primas, y Hürlimann (1994) lo amplió a la experiencia de rating y de reaseguro.
 - *Principio Orlicz:*
 Fue introducido por Haezendonck y Goovaerts (1982) como una alternativa multiplicativa del principio de utilidad equivalente. Para introducir este principio, utilizaron el concepto de una función Young γ , la cual va de \mathbb{R}_0^+ a \mathbb{R}_0^+ y puede ser escrita como una integral de la forma $\gamma(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \geq 0$, donde f es una función creciente, continua por la izquierda en \mathbb{R}_0^+ con $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Se ve que una función Young γ es absolutamente continua, convexa y estrictamente creciente, y tiene $\gamma'(0) = 0$. Se dice que γ está normalizado si $\gamma(1) = 1$.
 Dado lo anterior, sea $X \geq 0$ para una función Young normalizada γ en \mathbb{R}_0^+ la prima Orlicz es la raíz de $E[\gamma(X/\pi)] = 1$.
- El principio Orlicz satisface las siguientes propiedades:
- $P[X \leq Y] = 1 \Rightarrow \pi(X) \leq \pi(Y)$;
 - $\pi(X) = 1$ cuando $X \equiv 1$;
 - $\pi(\alpha X) = \alpha \pi(X)$ para $\alpha > 0$ y cualquier riesgo X ;
 - $\pi(X + Y) \leq \pi(X) + \pi(Y)$.
- *Principio de pérdida máxima (maximal loss/no rip-off premium principle):*
 $\pi[X] \leq \min\{p | S_X(p) = 1\}$. La pérdida máxima de la prima es un caso límite. Si X es ilimitado, esta prima es infinita.
 - Balbás et al. (2010) introducen un principio de cálculo de prima basado en la optimización de medidas del riesgo coherentes y acotadas por la media al estudiar el problema de la valoración de contratos de seguro ligados al mercado financiero, tales como las anualidades o rentas ligadas a índices bursátiles. Este principio parece presentar una serie de propiedades de interés, en primer lugar, es subaditivo y convexo, por lo que favorece la diversificación. Segundo, integra los riesgos actuariales y financieros, y no hace falta suponer independencia de los mismos. En tercer lugar, proporciona estrategias de cobertura para la aseguradora. Y finalmente, la prima del contrato es fácil de calcular en las aplicaciones prácticas, puesto que sólo hay que resolver problemas de programación lineal, pese a que las medidas del riesgo no son lineales en absoluto.
 - *Sistema bonus-malus:*
 Es un ejemplo de enfoque, diferente al cálculo de primas. En este caso, a todos los titulares de pólizas se les asigna una clasificación determinada en función de su historial de reclamaciones, y pueden ser transferidos de un grupo a otro. Este sistema es utilizado habitualmente por las aseguradoras de automóviles.

3.2 Problema del Reaseguro Óptimo

Anteriormente se ha hablado del riesgo de una manera teórica, ahora bien, se considera un proceso de riesgo $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ el cual representa el monto acumulado de las reclamaciones hasta el tiempo t .

Una de las características principales de un contrato de reaseguro es la cantidad $h(X)$ que determina el número de reclamaciones hechas pagadas por la aseguradora. El resto $X - h(X) = Z$ es pagado por la reaseguradora y, naturalmente, se refiere como a una *proporción del riesgo asegurado* X . La aseguradora paga la prima a la reaseguradora a fin de transferir esta parte de su riesgo.

La función $h(X)$ se denomina la *función de retención*, y tiene las siguientes propiedades:

- a) $h(X)$ y $X - h(X)$ son funciones no decrecientes;
- b) $0 \leq h(X) \leq X$, $h(0) = 0$.

Entre los reaseguros proporcionales,

1. *Reaseguro cuota-parte (quota share reinsurance)*. Es decir: cuando la aseguradora asume un riesgo X_i por una prima $\pi(X_i)$, mantendrá una proporción r , $0 < r < 1$, tanto de las reclamaciones X_i como de la prima $\pi(X_i)$ y la reaseguradora toma una proporción $(1 - r)$ también de X_i y $\pi(X_i)$.
2. *Reaseguro de excedente (surplus reinsurance)*. Es decir, cuando la aseguradora asume un riesgo X_i por una prima $\pi(X_i)$ y el capital asegurado y la retención son, respectivamente, el Q_i y M , se mantendrá una proporción M/Q_i de ambos el riesgo X_i y la prima $\pi(X_i)$ y la reaseguradora tomará una proporción de $(1 - M/Q_i)$ también de X_i y $\pi(X_i)$.

Entre los reaseguros no proporcionales,

1. *Reaseguro de exceso de pérdida (excess-loss reinsurance)*. Cuando la aseguradora asume un riesgo X_i y la retención es M , conservará $\min \{X_i, M\} = X_i \wedge M$ y cede $\max \{0, X_i - M\} = (X_i - M)_+$ a la reaseguradora.
2. *Reaseguro de exceso de siniestralidad (stop-loss reinsurance)*. Cuando las pérdidas totales son Y y la retención es M , la aseguradora retiene $Y \wedge M$ y cede $(Y - M)_+ = \max (Y - M, 0)$.

Hay riesgos demasiado grandes (por ejemplo, un avión jumbo o una plataforma de perforación de petróleo) en los cuales la propia reaseguradora también podrá reasegurar el riesgo, lo cual se conoce a menudo como *retrocesión* (la definición de los retrocesionarios fue vista en el primer capítulo). Así, se puede resumir que el mercado de seguros tiene por lo menos tres niveles:

1. Mercado Primario (aseguradoras).
2. Mercado de Reaseguro (reaseguradoras).

3. Mercado de Retrocesión (reaseguradoras que proveen seguro a otras reaseguradoras).

Claramente, el mercado de retrocesión puede consistir en más de un nivel. Para cada reaseguradora de nivel n -ésimo, el *tiempo de transferencia del riesgo*, es decir, el tiempo entre que una reaseguradora de nivel $(n - 1)$ recibe un riesgo y lo pasa a una reaseguradora de nivel (n) , es una variable aleatoria con alguna distribución F , y es independiente de los tiempos de transferencia de riesgo de otras compañías. Se denota a $\sum(X_n)$ como el número total compañías de nivel n -ésimo, y $R_{n,i}$ al número de compañías de nivel n -ésimo que aseguró a la compañía i -ésima de nivel $(n - 1)$. Se supone que $R_{n,i}$ son variables aleatorias independientes con distribución $(p_k)_{k=0,1,\dots}$.

Como ya se mencionó desde el punto de vista de la reaseguradora un contrato de reaseguro es solamente un seguro usual contra el riesgo $(X - h(X))$. Por lo tanto se puede calcular el nivel de la prima correspondiente utilizando la metodología descrita anteriormente: $P = \pi(X - h(X))$.

Hasta ahora hemos visto lo referente al reaseguro tradicional, pero cabe mencionar los últimos hallazgos en este sector. Por ejemplo han aparecido las *Técnicas de Transferencia Alternativa de Riesgos* (TAR), como es el caso del reaseguro de riesgo finito de vida y no vida, el reaseguro multianual de propiedad/accidente, y el reaseguro de multi-riesgo, los cuales son extensiones de los tipos convencionales de reaseguro. Otra propuesta reciente es el *Reaseguro Adaptado al Pivote Suavizado* (*Adaptive Pivot Smoothing*), diseñado para reducir la varianza del riesgo retenido sin afectar a la media, teniendo en cuenta la teoría moderna de la cartera. Los defensores del APS, Koller y Dettwyller, declaran que las formas tradicionales de reaseguro (proporcional y no proporcional) incrementan la carga media de la cedente. Considerando un riesgo X_i y una función de pago $h(X_i)$, que especifica la cantidad que la reaseguradora está obligada a pagar de la reclamación de X_i , los autores establecen que una aseguradora estaría mejor aconsejada a contratar una póliza de reaseguro, con media $E(h(X_i)) = 0$ y desviación estándar $D(h(X_i)) = dD(X_i)$, $0 < d < 1$, y sugieren que $h(X_i) = a(X_i - E(X_i))$, $0 < a < 1$. También, Koller y Dettwyller, recomiendan que la prima, “mucho más baja que la prima para los productos de reaseguro tradicionales” debe ser calculada por el principio de utilidad-cero.

Cuando se diseña un programa de reaseguro para un riesgo, hay un intento de decidir de forma óptima sobre el tipo de reaseguro y la cantidad a reasegurar. En otras palabras, surgen varias preguntas y muchos factores deben ser considerados: los actuales y futuros modelos de negocios y las exposiciones resultantes de pérdidas, la solidez financiera y la aversión al riesgo, las condiciones y oportunidades del mercado. A pesar de que la aseguradora y la reaseguradora están involucradas, la mayoría de los trabajos sobre el tema se dedican a la búsqueda de la forma óptima de reaseguro desde la perspectiva de la cedente y concluyen a favor de un tipo particular de reaseguro (óptimo), dependiendo del criterio de optimización elegido y el principio de cálculo de prima.

Retomando la idea de que al igual que cualquier otro contrato de seguro, el reaseguro tiene un precio, una prima que la cedente del riesgo tiene que pagar a la reaseguradora, tenemos que la prima puede ser más o menos costosa, de acuerdo con la cobertura acordada, y algunas veces no es tan fácil de calcular.

De manera general, se representa a la parte de la cantidad de reclamaciones pagadas por la reaseguradora por Z , obviamente una variable aleatoria. Entonces la prima de reaseguro deberá ser alguna función de la función de distribución de Z , por ejemplo, $\pi(Z)$. La prima de reaseguro es de gran importancia en este mercado. A continuación se enumeran aquellos principios de cálculo de primas que son frecuentemente utilizados en la literatura actuarial (algunos ya vistos en el apartado anterior), y los cuales tratan el problema de los contratos de reaseguro óptimo:

- Principio de valor esperado $\pi(Z) = (1 + \varphi)E(Z)$
- Principio exponencial $\pi(Z) = \frac{1}{\beta} \ln E[e^{\beta Z}]$
- Principio de varianza $\pi(Z) = E(Z) + \beta \text{Var}(Z)$
- Principio de valor medio $\pi(Z) = \sqrt{E(Z^2)} = \sqrt{(E(Z))^2 + \text{Var}(Z)}$
- Principio de desviación estándar $\pi(Z) = E(Z) + \beta D(Z)$
- Principio mixto $\pi(Z) = E(Z) + \beta_1 D(Z) + \beta_2 \text{Var}(Z)$
- Principio de varianza modificada $\pi(Z) = E(Z) + \beta_1 D(Z) + \beta_2 \frac{\text{Var}(Z)}{E(Z)}$
- Principio de utilidad cuadrática $\pi(Z) = E(Z) + e + \sqrt{e^2 - \text{Var}(Z)}$
- Principio de utilidad-cero $\pi(Z)$ tal que $U(w_0) = E[U(w_0 + \pi(Z) - Z)]$,

donde $\varphi, \beta, \beta_1, \beta_2, e > 0$, $U(w)$ es una función de utilidad de la riqueza de la reaseguradora tal que $U'(w) > 0$, $U''(w) < 0$, y w_0 es la riqueza inicial de la reaseguradora.

Un enfoque bastante habitual trata de minimizar alguna medida del riesgo cedido después del reaseguro, sujeta a ciertas condiciones sobre las primas. El primer artículo que adoptó este enfoque se debe a Borch (1960), quien demostró que el reaseguro *stop-loss* minimiza la varianza de la siniestralidad retenida, suponiendo que las primas se calculan de acuerdo con el principio del valor esperado. Poco tiempo después, Arrow (1963) mostró que el *stop-loss* maximiza la utilidad esperada de la riqueza final de una aseguradora aversa al riesgo, siempre que las primas sigan calculándose de acuerdo al mismo principio. Como maximizar la utilidad $u(x)$ equivale a minimizar la pérdida $w(x) = -u(-x)$, ambos enfoques son semejantes en el sentido de que procuran minimizar una cierta medida del riesgo, sujetándose a la restricción del cálculo de primas mediante el principio del valor esperado.

Las investigaciones posteriores siguieron la misma línea de trabajo, intentando tomar en consideración medidas del riesgo y/o principios de cálculo de primas más generales, y demostrando en algunos casos la optimalidad de contratos diferentes del *stop-loss*. Beard et al. (1977) demostraron que los contratos cuota-parte son la forma más económica de llegar a un valor dado para la varianza del riesgo retenido si la reaseguradora calcula la prima de tal manera que la carga aumenta de acuerdo con la

variación del riesgo cedido. Gerber (1979) ha demostrado que de todos los tipos de reaseguro en los cuales la parte cedida es una función de las reclamaciones individuales, el tipo *excess-loss* es el óptimo, en el sentido de que maximiza el coeficiente de ajuste, cuando el principio de cálculo de prima de reaseguro utilizado es el principio de valor esperado y el coeficiente de recargo se elige independientemente del tipo de reaseguro. Bajo el mismo supuesto de la prima de reaseguro, y si sólo se toman regímenes de reaseguro basados en las reclamaciones individuales, el *excess-loss* será óptimo si el criterio elegido es la maximización de la utilidad esperada, (Bowers et al., 1987).

En los últimos años, por ejemplo, Young (1999) maximiza la utilidad esperada de la riqueza final bajo el principio de primas de Wang. Kaluszka (2001) asume todavía a la varianza de la siniestralidad retenida como medida del riesgo que debe ser minimizada, pero considera diferentes principios de cálculo de primas como el de la desviación típica o el de la varianza. Gajek y Zagrodny (2004) consideran diferentes medidas del riesgo tanto simétricas como asimétricas, tales como la desviación absoluta esperada y la varianza truncada de la siniestralidad retenida, bajo el principio de primas de la desviación típica. De nuevo, Kaluszka (2005) considera varias medidas convexas del riesgo y varios principios convexas para el cálculo de primas (exponencial, semi-desviación y semi-varianza, holandés, distorsión, etcétera). Cai y Tan (2007), y Cai, Tan, Weng y Zhang (2008) utilizan como medidas del riesgo el *Valor en Riesgo* (VaR) y el *Valor en Riesgo Condicional* (CVaR), bajo el principio del *valor esperado*. Finalmente, Balbás, Balbás y Heras (2009), asumiendo de nuevo el principio del valor esperado para el cálculo de primas, encuentran condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para medidas del riesgo generales como son todas las medidas de desviación y todas las acotadas por la media.

A continuación se verán a detalle algunos de los resultados más recientes. Sea Y una variable aleatoria no negativa definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, que representa el monto total de reclamaciones de la aseguradora en un período determinado. Sea $Z(Y): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible de Y , tal que $0 \leq Z(Y) \leq Y$ con probabilidad 1 y en representación de la parte del importe total de las reclamaciones pagadas por la reaseguradora. En los resultados que siguen está el interés en la determinación de la función Z en un espacio dado que minimiza a una función de riesgo dada, posiblemente bajo algunas restricciones (la función de riesgo varía de resultado a resultado).

- *Estrategias de reaseguro óptimo de la aseguradora (Gajek y Zagrodny, 2000).*
Se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Minimizar}_{Z \in \mathcal{Z}} \text{Var}(Y - Z(Y)) \\ \text{s.a } \pi(Z) = EZ(Y) + \beta DZ(Y) \leq P, \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{Z} = \{Z: [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R} | Z \text{ es medible y } 0 \leq Z(y) \leq y, \forall y \geq 0\} \}.$$

La prima $\pi(Z)$ es calculada por el principio de desviación estándar con el parámetro de recargo de seguridad β , $\beta > 0$.

$P > 0$ es la cantidad de dinero que la aseguradora está dispuesta a gastar en reaseguro.

Es decir: teniendo en cuenta el conjunto de todos los convenios de reaseguros plausibles $Z(Y)$, con la prima de reaseguro (calculada bajo el principio de desviación estándar) menor o igual a P , el propósito es averiguar el convenio $Z^*(Y)$ que minimiza la varianza del riesgo retenido, $\text{Var}(Y - Z(Y))$. El principio de desviación estándar se selecciona para que tenga en cuenta la variabilidad de la parte de la reaseguradora del riesgo.

Gajek y Zagrodny prueban su principal resultado suponiendo que $E(Y)^2 < \infty$ (es decir, trabajan en un espacio L^2), $E(Y) + D(Y) > P$, y haciendo uso de la derivada de Gâteaux y del teorema de Karush-Kuhn-Tucker.

- *Reaseguro óptimo bajo medidas generales de riesgo (Gajek y Zagrodny, 2004).*
Considerando a una aseguradora interesada en comprar tanta protección contra riesgos como sea posible, a un precio que no exceda el límite dado P . Se quiere encontrar el convenio de reaseguro $Z^*(Y)$ que es solución al siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar}_{Z \in \hat{Z}(Z_1, Z_2)} \eta(Z) = E\varphi(Y - Z(Y) - E(Y - Z(Y))) \\ \text{s.a } \pi(Z) = E Z(Y) + \beta DZ(Y) \leq P, \end{array} \right.$$

se asume que:

- (A) $E(Y) < \infty$,
- (B) $E Z_1^2(Y) < \infty$ y $E Z_2^2(Y) < \infty$;
- (C) $E\varphi(Y - Z(Y) - E(Y - Z(Y))) < \infty$, $Z \in \hat{Z}(Z_1, Z_2)$.

Además, para cualquier función φ que satisface (A)-(C) y dado $Z^* \in \hat{Z}(Z_1, Z_2)$, se define una función de soporte φ en Z^* , como una función integrable $s^*(\cdot)$ que satisface

$$\begin{aligned} & \int_{[0, \infty]} \left[\varphi(y - Z(y) - E(Y - Z(Y))) - \varphi(y - Z^*(y) - E(Y - Z^*(Y))) \right] dF(y) \\ & \geq \int_{[0, \infty]} s^*(y) [-Z(y) - Z^*(y) + E(Z(Y) - Z^*(Y))] dF(y), \end{aligned}$$

donde F es la función de distribución de la reclamación total Y .

Teniendo en cuenta la función del Lagrangiano y el uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene una condición general suficiente para que un contrato determinado sea óptimo dentro de la clase $\hat{Z}(Z_1, Z_2)$.

- *Contratos de reaseguro óptimo, media y varianza (Kaluszka, 2005).*

El objetivo es derivar las reglas óptimas del reaseguro que permiten a la cedente negociar entre la reducción tanto de la varianza de los riesgos retenidos como del valor esperado de sus ganancias.

Teniendo en cuenta un contrato de reaseguro acordado sobre una reclamación de una base de reclamaciones con una función de compensación común Z , el problema es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \text{Var}(\sum_{i=1}^N [X_i - Z(X_i)]) \\ \text{s.a} \quad D(\sum_{i=1}^N Z(X_i)) \leq g(Pr, E \sum_{i=1}^N Z(X_i)) \\ \quad E(\sum_{i=1}^N [X_i - Z(X_i)]) = mEN \\ \quad 0 \leq Z(X) \leq X, \end{array} \right.$$

donde X_1, X_2, \dots es la secuencia de las reclamaciones ocurridas en un intervalo de tiempo, que se suponen son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuibles con X , $\text{Var } X_i < \infty$; $Z(X_i)$ es la parte de la reclamación X_i que se lleva la reaseguradora, a ser determinada; $D(\sum_{i=1}^N Z(X_i))$ es la desviación estándar de $\sum_{i=1}^N Z(X_i)$ y se asume que la prima de reaseguro, llamada Pr , está definida por $g(Pr, E \sum_{i=1}^N Z(X_i)) = D(\sum_{i=1}^N Z(X_i))$, $g(x, y)$ una función en $\{(x, y) \mid x \geq y, y \geq 0\}$, incrementando en x por cada y (una clase que incluye varios de los principios usuales); m es un parámetro fijo tal que $0 < m < E(X)$; de acuerdo con que el problema tiene soluciones no triviales, $D(\sum_{i=1}^N Z(X_i)) \leq g(P, E \sum_{i=1}^N X_i)$, $P > 0$ es la cantidad de dinero que la cedente quiere gastar en reaseguro.

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene que la solución al problema está dada por

$$Z^*(X) = \frac{E(X) - m}{E(X - b)_+} (X - b)_+, \text{ con } 0 \leq b < \sup X = \sup\{b; \Pr\{X - b\} > 0\}$$

- *Política de reaseguro óptima: el coeficiente de ajuste y el criterio de utilidad esperada (Manuel Guerra y María de Lourdes Centeno, 2008).*

Este resultado se aplica cuando la cedente busca maximizar el coeficiente de ajuste del riesgo retenido. El problema se resuelve mediante la exploración de la relación entre la maximización del coeficiente de ajuste y la maximización de la utilidad esperada de la riqueza para la función de utilidad exponencial.

La política óptima para el criterio de coeficiente de ajuste coincide con la del criterio de utilidad esperada para el máximo valor del coeficiente de aversión al riesgo (-1). La importancia de esta relación es que entonces se puede poner atención en la utilidad esperada del problema de la riqueza, que es, desde el punto de vista matemático, un problema mucho más fácil. Se demuestra que siempre hay una política óptima para el criterio de la utilidad esperada y que todas las políticas óptimas son equivalentes desde el punto de vista económico, en el sentido de que el resultado neto entre las primas y las reclamaciones, y por lo tanto la ganancia, es

el mismo con probabilidad 1. Un resultado equivalente es entonces cierto para el problema del coeficiente de ajuste.

Dado lo anterior se demuestra que, suponiendo que la prima de reaseguro se calcula por el principio de valor esperado: en primer lugar, para cada valor positivo del coeficiente de aversión al riesgo, existe una política óptima para el criterio de utilidad esperada; en segundo lugar, también existe una política óptima para el criterio del coeficiente de ajuste. La política óptima para cualquiera de los criterios es única y es un contrato *stop-loss*.

Cabe destacar que en este resultado, el importe que debe gastarse para el reaseguro no está acotado o limitado, como sucede en los que se han visto anteriormente.

- *Retención óptima para el reaseguro stop-loss bajo las medidas del riesgo VaR y CTE (Jun Cai, Ken Seng Tan, 2007).*

Como se mencionó anteriormente el VaR no es una medida del riesgo coherente y no proporciona información sobre la severidad de la insuficiencia para el riesgo más allá del umbral. La CTE es intuitivamente atractiva, ya que captura la magnitud esperada de la pérdida, dado que el riesgo es mayor o igual a su VaR.

Cai y Tan tratan con el problema de determinar la retención M óptima en un reaseguro *stop-loss*, minimizando el VaR y la CTE. Es decir, la optimización del VaR consiste en determinar la retención óptima M^* tal que

$$\text{VaR}_T(M^*, \alpha) = \min_{M \geq 0} \{\text{VaR}_T(M, \alpha)\} = M^* + \pi(M^*),$$

donde $T = I^M + \pi(M)$ es el costo total de la aseguradora.

Se demuestra que la retención óptima M^* existe y es dada por $M^* = S^{-1}(\rho^*)$, $\rho^* = 1/(1 + \rho)$, si y sólo si $\alpha < \rho^* < S(0)$ y $S^{-1}(\alpha) \geq S^{-1}(\rho^*) + \pi(S^{-1}(\rho^*))$.

Se observa que la retención óptima depende sólo de la distribución de la pérdida asumida y del factor de recargo del reasegurador.

Pasando a la optimización de la CTE, ésta consiste en la determinación de la retención óptima \tilde{M} tal que $\text{CTE}_T(\tilde{M}, \alpha) = \min_{M \geq 0} \{\text{CTE}_T(M, \alpha)\}$. Mediante cálculos sencillos que demuestran que $\text{CTE}_T(M, \alpha) = E[I^M + \pi(M) | I^M + \pi(M) \geq \text{VaR}_T(M, \alpha)]$, se puede descomponer en $\text{CTE}_T(M, \alpha) = \text{CTE}_{I^M}(M, \alpha) + \pi(M)$, donde $I^M = Y \wedge M$ es la cantidad retenida de la reclamación.

Con lo que se obtiene que la retención óptima $\tilde{M} > 0$ existe y está dada por $\tilde{M} = S^{-1}(\rho^*)$, si y sólo si $\alpha < \rho^* < S(0)$. Además, $\tilde{M} \geq S^{-1}(\rho^*)$ si y sólo si $0 < \alpha = \rho^* < S(0)$.

Comparando con la optimización del VaR, es interesante observar que ambos criterios dan lugar a la misma retención óptima, pero la condición de optimalidad para la optimización basada en la CTE es menos restrictiva, proporcionando una ventaja adicional para la adopción de dicho criterio.

La optimización basada en el VaR tiene una justificación alternativa desde el punto de vista de un requerimiento de capital mínimo. Al asumir el riesgo Y , la aseguradora cobra una prima de seguro c y al mismo tiempo reserva un capital mínimo K , por lo que su probabilidad de insolvencia es a lo sumo α . En otras palabras, dado α y c , el capital mínimo K es la solución mínima de la desigualdad $\Pr[T > K + c] \leq \alpha$. En la práctica, las aseguradoras prefieren reservar el menor capital posible mientras se satisfaga la restricción de insolvencia. Por lo tanto, a partir de la definición de $\text{VaR}_T(M, \alpha)$, se concluye que $K = \text{VaR}_T - c$. Dado que $\text{VaR}_T(M^*, \alpha) = \min_{M > 0} \{\text{VaR}_T(M, \alpha)\}$, el requerimiento de capital también es minimizado a la restricción de insolvencia.

- *Reaseguro óptimo bajo las medidas del riesgo VaR y CTE (Jun Cai, Ken Seng Tan, Chengguo Weng, Yi Zhang, 2008).*

Sea Y una variable aleatoria no negativa que representa las reclamaciones agregadas inicialmente asumidas por la aseguradora. La función de distribución acumulada de Y es $F(y)$, una función continua estrictamente creciente en $(0, \infty)$, con un posible salto en 0, lo que permite a Y ser una suma aleatoria $\sum_{i=1}^N X_i$, un caso especial importante en los modelos actuariales de pérdida. La función de supervivencia de Y es $S(y)$. Considerando un convenio de reaseguro de tal manera que la aseguradora cede parte de su pérdida, $Z(Y)$, $0 \leq Z(Y) \leq Y$, a un reasegurador y retiene $I(Y) = Y - Z(Y)$. $Z(y)$ es por lo tanto, la función de pérdida cedida e $I(y)$ es la función de pérdida retenida. Sea $\pi(Z)$ que denota a la prima de reaseguro y $T(Z) = I(Y) + \pi(Z)$ a la exposición total al riesgo de la aseguradora en presencia del reaseguro.

Como es habitual, el asegurador está ahora preocupado por $T(Z)$ en lugar de Y y el objetivo es encontrar una adecuada elección de la función de pérdida cedida, a fin de proporcionar una manera eficaz de reducir su exposición al riesgo. Puesto que $T(Z(y))$ capta el coste global de asegurar una pérdida para una función de pérdida cedida Z , una gestión prudente del riesgo es asegurar que las medidas del riesgo asociadas con $T(Z(y))$ son tan pequeñas como sea posible.

La optimización del VaR ahora consiste en determinar Z^* de tal manera que

$$\text{VaR}_{T(Z^*)}(\alpha) = \min_{Z \in \mathcal{Z}} \{\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha)\},$$

$$\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha) = \inf \{t: \Pr [T(Z) > t] \leq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < S(0).$$

Definiendo el $\text{VaR}_{I(Y)}(\alpha)$ como el VaR de la variable aleatoria pérdida retenida $I(Y)$, la propiedad de traslación invariante del VaR permite escribir $\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha) = \text{VaR}_{I(Y)}(\alpha) + \pi(Z)$.

Como resultado se tiene el siguiente teorema:

Para un determinado nivel de confianza de $(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < S(0)$:

- (a) Si $\rho^* < S(0)$ y $S^{-1}(\alpha) > u(\rho^*)$, entonces $\min_{Z \in \mathbb{Z}} \{\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha)\} = u(\rho^*)$ y el VaR mínimo se alcanza en $Z^*(y) = (y - M^*)_+$.
- (b) Si $\rho^* < S(0)$ y $S^{-1}(\alpha) = u(\rho^*)$, entonces $\min_{Z \in \mathbb{Z}} \{\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha)\} = S^{-1}(\alpha)$ y el VaR mínimo se alcanza en $Z^*(y) = r(y - M^*)_+$, para cualquier constante r tal que $0 < r \leq 1$.
- (c) Si $\rho^* \geq S(0)$ y $S^{-1}(\alpha) > v(0)$, entonces $\min_{Z \in \mathbb{Z}} \{\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha)\} = v(0)$ y el VaR mínimo se alcanza en $Z^*(y) = y$.
- (d) Si $\rho^* \geq S(0)$ y $S^{-1}(\alpha) = v(0)$, entonces $\min_{Z \in \mathbb{Z}} \{\text{VaR}_{T(Z)}(\alpha)\} = v(0)$ y el VaR mínimo se alcanza en $Z^*(y) = rx$, para cualquier constante r tal que $0 < r \leq 1$.

donde

$$\rho^* = \frac{1}{1 + \rho}; \quad M^* = S^{-1}(\rho^*); \quad v(y) = y + \frac{1}{\rho^*} \int_y^\infty S_Y(t) dt, \quad y \geq 0;$$

$$u(y) = S^{-1}(y) + \frac{1}{\rho^*} \int_{S^{-1}(y)}^\infty S_Y(t) dt, \quad y \geq 0.$$

El anterior teorema establece que para el modelo de reaseguro óptimo propuesto, este óptimo es un reaseguro *stop-loss* en el caso (a), un reaseguro *change-loss* en el caso (b), y un reaseguro cuota-parte en los casos (c) y (d), dependiendo del nivel de confianza de las medidas del riesgo y el recargo de seguridad de la prima de reaseguro.

Para identificar el reaseguro óptimo bajo la medida de riesgo CTE el proceso de deducción es análogo al del criterio del VaR (pero Cai et al. hacen hincapié en que es considerablemente más complicado tratar las funciones óptimas de pérdida cedida bajo el criterio de la CTE que bajo el criterio del VaR).

- *Reaseguro óptimo con las medidas generales de riesgo (Alejandro Balbás, Beatriz Balbás, Antonio Heras, 2009)*

Considerando a una aseguradora que en un determinado período recibe una prima c y tiene que pagar una cantidad variable no negativa $Y \in L^p_+$, donde L^p es la variable aleatoria valuada en el espacio Banach de \mathbb{R} . Y en Ω tal que $E|y|^p < \infty$, $p \in [1, \infty)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ un espacio de probabilidad. Sea $\eta: L^p \rightarrow \mathbb{R}$ la función general de riesgo que la aseguradora utiliza para controlar el riesgo de su riqueza final (al final del período).

Suponiendo que un contrato de reaseguro se firma de manera tal que la aseguradora cederá $Z \in L^p$ y retendrá a $I = Y - Z$; que el principio de cálculo de

prima de reaseguro está dado por una función convexa continua $\pi: L^p \rightarrow \mathbb{R}$ y que $P > 0$ es la cantidad máxima que la aseguradora pagará por el contrato. El propósito será elegir la retención I^* (que es equivalente a elegir $Z^* \in \mathcal{Z}$) para resolver el problema:

$$\begin{cases} \text{Minimizar}_{I \in \mathfrak{I}} \eta(c - I - \pi(Z)) \\ \pi(Z) \leq P, \end{cases}$$

donde

$$\mathfrak{I} = \{I: [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R} \mid I \text{ es medible y } 0 \leq I(y) \leq y, \forall y \geq 0\}.$$

Después de realizar cálculos y operaciones intermedios se llega a un problema equivalente convexo que es más fácil de resolver. A pesar de la generalidad de los análisis realizados, la solución, dependerá obviamente de los supuestos concretos acerca del principio de cálculo de prima que el reasegurador aplique; Balbás et al. utilizaron el principio de valor esperado.

Después de verificar si los contratos de reaseguro más usuales, cuota-parte y *stop-loss*, resolvían el problema, sus conclusiones fueron que:

- Los contratos cuota-parte no son óptimos en la práctica: para las medidas del riesgo acotadas por la media sería necesario que $\rho = 0$, lo que no se retiene; y para las medidas de desviación, Y debería ser de varianza cero.
- Los contratos *stop-loss*, son óptimos con retención M , es decir, $I^M = \min\{Y, M\}$.

Además proponen otras funciones de riesgo particulares y resumen sus resultados en tres teoremas. En los dos primeros se ofrecen resultados al considerar que η es σ_2 y σ_1 , respectivamente, y la desviación general p definida como $\sigma_p(I) = (E(|I - E(I)|^p))^{1/p} = \|I - E(I)\|_p$.

En el tercero, se asume que $\eta = \text{CVaR}_\alpha(I)$, $\text{CVaR}_\alpha(I) = (1/\alpha) \int_0^\alpha \text{VaR}_t(I) dt = \max \{-E(IW); W \in L^\infty, 0 \leq W \leq 1/\alpha, 0 < \alpha < 1\}, \forall I \in L^1$, una definición que garantiza que el CVaR es siempre coherente y acotado por la media. En los tres casos, cuando es posible identificar una solución, ésta es del tipo *stop-loss*. Sería razonable, esperar que cuando los supuestos son equivalentes a los dados por Cai et al. anteriormente, las soluciones en el tercer teorema son equivalentes a las de éstos también.

Otra manera de ver el reaseguro sería si se utiliza como medida de riesgo en sí mismo, es decir, para resolver problemas de reaseguro e inversión óptimos, el problema de optimización toma como base la suposición de que la aseguradora puede gestionar su reserva, contra el riesgo, de tres maneras: la inversión, el reaseguro (proporcional) y el consumo. Más precisamente, se supone que la aseguradora pone su reserva en un mercado financiero que contiene una cuenta libre de riesgo y algunos activos de

riesgo, y que se le permite cambiar sus posiciones de inversión de forma continua. Además, que puede ceder (desviar) una fracción de las reclamaciones entrantes, mientras que al mismo tiempo da una parte de su prima, a la reaseguradora. Finalmente, también se le permite “consumir” en forma de dividendos, retornos, entre otros; el objetivo de la aseguradora es, entonces, optimizar determinada utilidad mediante la gestión de la cartera de inversiones, la política de reaseguro y el consumo.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS MULTICRITERIO

Un problema de decisión se da cuando un directivo, gerente o grupo de trabajo se enfrenta a una situación o problemática que presenta más de una *alternativa* para ser resuelta; normalmente se busca a un consultor externo para obtener su ayuda al momento de tomar la mejor decisión entre las propuestas posibles (*conjunto de elección*). Esto es lo que se llama una situación de *ayuda a la decisión*, en la cual los dos actores clave interactuarán en un proceso que puede comprender varias fases; al primero lo llamaremos *decisor*, a quien se le ayudará a tomar una decisión y el segundo será el *analista*, quien a través de realizar cierto o diversos análisis, brindará esta “ayuda” a la decisión.

Actualmente, los *criterios* (o atributos) de todo tipo, ya sean sociales, económicos y hasta ambientales tienen que ver en todo momento con la toma de decisiones, ya que permiten al tomador de éstas describir los diferentes resultados a los que se llegaría con las alternativas existentes. Es así como el proceso de decisión toma en cuenta cómo se contradicen dichos criterios, los beneficios que aportan, el que cumplan con los objetivos marcados por el decisor, y claro que puedan compaginarse en un modelo de decisión; teniendo con esto la base del *análisis multicriterio*, el cual ayuda a tomar decisiones, en términos de elección, ordenación y clasificación de las soluciones.

Si bien el análisis multicriterio puede ser poco conocido, lo cierto es que tiene sus orígenes en los sistemas de votación de finales del siglo XVIII, gracias a los trabajos de Jean-Charles de Borda y del Marqués de Condorcet. Ya en el siglo XIX, Vilfredo F. Pareto introduce el concepto de *dominancia*, dentro de lo que se conoce como *óptimo de Pareto*, según el cual ningún agente económico puede mejorar sin implicar el detrimento de otro; este avance fue fundamental en la teoría moderna del análisis multicriterio.

En los años 40's y 50's, los avances más significativos en la toma de decisiones hechos por John Von Neumann y Oskar Morgenstern, así como Leonard Jimmie Savage, fue la introducción de la *Teoría de la Utilidad* como una norma.

1960 fue el año de gran importancia dentro del desarrollo de la decisión multicriterio, ya que ésta se individualiza y adopta su propia metodología aplicada a resolver el problema de *seleccionar una alternativa teniendo múltiples criterios, contradictorios entre sí*.

Al final de los años 60's, el análisis multicriterio atrajo el interés de los investigadores de operaciones europeos. Bernard Roy, fue uno de los pioneros en este campo (de hecho se le considera como el fundador de la Escuela Europea del Análisis Multicriterio), presentando en 1968 su *enfoque de relaciones de superación* dentro de su propuesta sobre los Métodos Electre.

En 1971, tuvo lugar la primera reunión dedicada al Análisis Multicriterio, dentro del VIII Congreso de Programación Matemática llevada a cabo en La Haya, Países Bajos; en la cual tuvieron gran aceptación los trabajos presentados por B. Roy, Benayoun y Tergny,

y Geoffrion. En 1972, es cuando realmente el análisis multicriterio alcanza su individualidad y autonomía, llevándose a cabo la segunda reunión dedicada sólo a la “Toma de Decisiones Multicriterio”, en la Universidad de Columbia.

Desde 1975 empezaron a verse diferentes líneas de investigación, por un lado la escuela francófona (Roy, Brans, Vansnick, Jacques-Lagrèze, Roubens, Vincke, etc.), ha estudiado el campo discreto multicriterio, las relaciones de superación y las preferencias del decisor. Por otro lado la escuela estadounidense, se dividió entre los partidarios del Método de la Utilidad Multiatributo (Kenny y Raïffa 1976), y los pragmáticos que utilizaban distintos métodos (Zeleny, Yoon, Saaty, etc.). También en el campo continuo aparecieron diversos métodos, por ejemplo Steuer y Cloo (1983), Spronk (1981), Isermann (1977 y 1978), entre otros. En 1985, a las dos escuelas anteriores se les suma la escuela del Pacífico, con sus principales representantes: Chankong, Sawaragi, Seo, Tabucanon y Takeda.

A partir de sus primeros años, el camino seguido por el análisis multicriterio fue el mismo que el de la Investigación de Operaciones, es decir, el modelo de encontrar una decisión óptima maximizando una función; pero dicho planteamiento dentro del campo multicriterio no tiene validez, por lo que en 1987, B. Roy propone nuevas orientaciones de estudio en este campo.

Durante los 80's, la introducción de la informática fue primordial para llevar a cabo el trabajo de la toma de decisiones multicriterio, hoy en día el análisis multicriterio no puede llevarse a cabo sin potentes herramientas informáticas.

En años más recientes, el desarrollo de este análisis ha ido creciendo, por ejemplo debido a:

- Nuevos desarrollos teóricos de nuevas técnicas y/o la caracterización de modelos de decisión ya existentes.
- La aplicación de metodologías multicriterio dentro de los sistemas de soporte integrales de decisión.
- Aplicaciones innovadoras en nuevas áreas, como el control de gestión, economía, finanzas, planificación medio ambiental y energética, telecomunicaciones, transporte, inteligencia artificial, etc.

4.1 Robustez

Un concepto importante dentro del ámbito de toma de decisiones es el término de *robusto*, pero dado que se le suelen dar connotaciones muy diversas e incluso no claras; que pueden llevar al decisor a interpretaciones y/o conclusiones equivocadas, resulta muy complicado dar una definición objetiva de lo que es robustez.

Un ejemplo de cómo se utiliza erróneamente el término de robusto, se da cuando al aplicar un análisis de sensibilidad a un conjunto de soluciones posibles; las soluciones “insensibles” a los cambios se definen como óptimas y las denominan como *robustas*.

Cuando se proponen soluciones o se le hacen recomendaciones al decisor, éstas se deben basar en modelos, sin embargo existen aproximaciones difusas o zonas de ignorancia que los afectan y las cuales deben ser tomadas en cuenta; esto es cuando se pone atención a la robustez o lo que es lo mismo cuando se emplea el análisis de robustez.

El análisis de robustez, al igual que el de sensibilidad, pretende incorporar la experiencia que se tiene sobre la incertidumbre; utilizando además de la optimización un rango más amplio y concreto de resultados matemáticos (informáticos), con lo que una solución podría llegar a ser factible o cuasi óptima.

Se puede mencionar así la definición de *conclusión robusta* la cual nos dice que una conclusión C^r es robusta respecto a un dominio Ω de posibles valores de preferencia y parámetros técnicos, si no existe un conjunto particular de parámetros $\tilde{\omega} \in \Omega$, que claramente invalide a C^r .

De cara al análisis multicriterio, lo que se busca es que el resultado sea robusto, pero muchos investigadores opinan que para llegar a dicho resultado se debe también poner atención a la robustez del método y de las conclusiones obtenidas.

4.2 Métodos multicriterio

Durante muchos años, la única manera de formular un problema de decisión fue mediante el enfoque monocriterio, el cual relacionaba todos los aspectos de una situación en una sola escala de medición.

Recientemente se considera que este tipo de enfoque de un problema de decisión resulta muy reducido, limitado y a veces hasta forzado o poco realista. Por esto tiene su aparición el enfoque multicriterio.

En un método multicriterio el decisor tiene libertad para expresar sus preferencias y es más realista que el método monocriterio ya que admite la modelización de las preferencias mediante estructuras matemáticas como los pseudo-criterios, criterios de intervalos, semi-criterios, etc. Por esto el Análisis Multicriterio se impone y consolida cada vez más.

Algunas características de los métodos multicriterio son¹³:

- Se tratan de aproximaciones *a priori*.
- Consideran objetivos múltiples.
- Jerarquizan y ponderan de manera diferenciada las alternativas.
- Minimizan los costos.
- Maximizan los impactos positivos que se quieran perseguir.

¹³ "Métodos lineales y multicriterios", UNAM, pp. 66

- Se atribuye a cada variable una puntuación especial en escala predeterminada.
- No se califican por un criterio único, consideran el promedio o los requisitos básicos que debe satisfacer el curso de acción que se elija.
- Se establecen candados de protección a un elemento minoritario.
- La selección se hace a través de un cálculo satisfactorio de condiciones mínimas que arroja resultados razonables (no existe el óptimo). En términos generales, este tipo de métodos distinguen entre propuestas aceptables y no aceptables.

Actualmente las compañías que utilizan los métodos multicriterio para la toma de decisiones, se enfrentan a un marco de trabajo enfocado al valor, es decir, que las estrategias son planteadas para lograr los objetivos estratégicos de la empresa. Esto en su momento ayudará a la alineación de la visión estratégica de la compañía con sus objetivos estratégicos, y a tener un mejor alcance de las opciones estratégicas que esté considerando.

4.2.1 Formulación

La manera simple de ver que se tiene un problema de decisión multicriterio es contar con un conjunto finito o infinito de soluciones y/o alternativas, dos o más criterios y al menos un decisor.

De manera formal, se formula como sigue:

$$\text{Opt } z(x) = \left(z_1(x), \dots, z_p(x) \right) \\ x \in S$$

donde S es el espacio de *alternativas* o *soluciones* (si éste fuese continuo, sería la región factible, $S \subseteq \mathbb{R}^n$).

Al conjunto $z(S)$ se le denomina *conjunto de elección* (si se trataran de criterios numéricos entonces $z(S) \subseteq \mathbb{R}^p$).

Recapitulando algunos de los conceptos básicos dentro del Análisis Multicriterio son:

Criterio: Es el valor medido de una alternativa independientemente del decisor, entre ellos pueden competir o contradecirse.

Objetivo: Es la manera en que un criterio mejora, puede ser maximizándose o minimizándose cuando es del tipo numérico y en el caso no numérico, esta mejora se definirá por un sistema de preferencias sobre dicho criterio.

Nivel de aspiración: El decisor puede llegar a definir un nivel aceptable de éxito para cada criterio.

Meta: Es la combinación de un criterio y su nivel de aspiración.

Así los pasos más comunes entre los métodos multicriterio son (Hwang y Yoon, 1981):

- a) Definir los objetivos.
- b) Determinar las alternativas a ser evaluadas.
- c) Identificar los criterios importantes.
- d) Determinar el valor de cada alternativa de acuerdo a cada criterio.
- e) Definir los pesos o ponderaciones de acuerdo a la importancia de cada criterio.
- f) Evaluar las alternativas en cada criterio, cada alternativa i puede considerarse un vector con m atributos $a_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{im}\}$.
- g) Calcular el beneficio de cada alternativa, cada método propone su forma para hacerlo.
- h) Comparar los beneficios obtenidos para elegir la mejor alternativa.

4.2.2 Tipos

Existen varios métodos multicriterio, todos con sus propias características por las cuales pueden ser clasificados de diferentes maneras; por ejemplo por sus datos pueden ser determinísticos, estocásticos o difusos, pueden ser individuales o grupales dependiendo de la cantidad de decisores o como veremos a continuación por la manera de evaluar las alternativas.

En el siguiente cuadro se presenta un resumen de los métodos multicriterio más utilizados actualmente:

Cuadro IV.1 Tipos de Métodos Multicriterio¹⁴

Método	Ventajas	Desventajas	Áreas de aplicación
Teoría de la Utilidad Multiatributo	<ul style="list-style-type: none"> • Toma en cuenta la incertidumbre. • Puede incorporar las preferencias. 	<ul style="list-style-type: none"> • Las preferencias tienen que ser precisas. • Necesita de mucha información. 	<ul style="list-style-type: none"> • Actuaría • Agricultura • Economía • Finanzas • Gestión de la energía y del agua.
Proceso Analítico Jerárquico	<ul style="list-style-type: none"> • Es fácil de usar. • Es escalable. • Su estructura jerárquica puede ajustarse fácilmente para adecuarse a muchos problemas de tamaño. • No requiere de muchos datos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Presenta problemas debido a la interdependencia entre los criterios y las alternativas. • Puede llevar a inconsistencias entre los criterios de juicio y clasificación. • Cambio en los rangos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas de rendimiento. • Gestión de recursos. • Política y estrategia corporativa. • Política pública. • Estrategia política y planeación.
Lógica Difusa	<ul style="list-style-type: none"> • Permite entradas imprecisas. • Toma en cuenta información insuficiente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es difícil de desarrollar. • Puede requerir gran cantidad de simulaciones antes de utilizarla. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ingeniería. • Economía. • Medio ambiental. • Social. • Médica. • De gestión.
Razonamiento Basado en Casos	<ul style="list-style-type: none"> • No requiere gran cantidad de datos adicionales. • Requiere poco mantenimiento. • Puede mejorar con el tiempo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Sensibilidad a los datos inconsistentes. • Requiere de muchos casos similares observados. 	<ul style="list-style-type: none"> • Negocios. • Seguros de automóviles. • Medicina.

¹⁴ Basado en Tabla 1 "An Analysis of Multi-Criteria Decision Making Methods", pp. 63-64

	<ul style="list-style-type: none"> • Puede adaptarse a los cambios en el entorno. 		<ul style="list-style-type: none"> • Diseño industrial.
Análisis Envolvente de Datos	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de manejar múltiples entradas y salidas. • Puede analizar y cuantificar la eficiencia. 	<ul style="list-style-type: none"> • No se ocupa de datos imprecisos. • Asume que todas las entradas y salidas son suficientemente conocidas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Economía. • Medicina. • Servicios públicos • Seguridad vial. • Agricultura. • Comercio minorista. • Problemas de negocios.
Técnica Simple de Clasificación Multiatributo (SIMPLEX Multiatributo)	<ul style="list-style-type: none"> • Es simple. • Permite cualquier tipo de técnica de asignación de pesos. • Otorga menos esfuerzo a los tomadores de decisiones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Su procedimiento puede resultar no conveniente considerando un marco de trabajo complicado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Medio ambiental. • De la construcción. • Transportación y logística. • Militar. • Problemas de fabricación y montaje.
Programación por Metas	<ul style="list-style-type: none"> • Es capaz de manejar problemas a gran escala. • Puede producir alternativas infinitas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Su incapacidad de trabajar con los coeficientes de peso. • Por lo general necesita ser utilizado en combinación con otros métodos multicriterio para la ponderación de los coeficientes de peso. 	<ul style="list-style-type: none"> • Producción • Programación. • Servicios sanitarios. • Selección de cartera. • Sistemas de distribución. • Energética. • Recursos forestales.
Ponderación Aditiva Simple	<ul style="list-style-type: none"> • Capacidad de compensación entre los criterios. • Es intuitiva para los decisores. 	<ul style="list-style-type: none"> • Las estimaciones obtenidas no siempre reflejan la situación real. • El resultado final puede no ser lógico. 	<ul style="list-style-type: none"> • Gestión financiera. • Uso del agua.

	<ul style="list-style-type: none"> • Su cálculo es simple no requiere de programas informáticos complejos. 		<ul style="list-style-type: none"> • Negocios.
Técnica para la Ordenación de Preferencias por Similitud a la Solución Ideal	<ul style="list-style-type: none"> • Tiene un procedimiento simple. • Es fácil de usar y programar. • El número de pasos siempre es el mismo independientemente del número de criterios. 	<ul style="list-style-type: none"> • El uso de la distancia euclidiana no considera la correlación entre criterios. • Difícil de ponderar y mantener coherencia de juicio al tomar una decisión. 	<ul style="list-style-type: none"> • Gestión de suministro y logística. • Ingeniería. • Sistemas de fabricación. • Negocios y marketing. • Medio ambiental. • Recursos humanos.
PROMETHEE	<ul style="list-style-type: none"> • Fácil de usar. • No requiere la suposición de que los criterios son proporcionales. 	<ul style="list-style-type: none"> • No provee un método claro para la asignación de los pesos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Medio ambiental. • Hidrológica. • Negocios y finanzas. • Química. • Transportación y logística. • Fabricación y montaje. • Energética. • Agricultura.
ELECTRE	<ul style="list-style-type: none"> • Toma en cuenta la incertidumbre y la ambigüedad. 	<ul style="list-style-type: none"> • Su proceso y sus resultados pueden ser difíciles de explicar en términos sencillos. • Sus relaciones de superación causan que las fortalezas y debilidades de las alternativas no sean identificadas directamente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Actuarial. • Energética. • Economía. • Medio ambiental. • Transportación.

Veremos una descripción de los métodos antes mencionados y se explica más a fondo la metodología del método multicriterio ELECTRE que es con la que se ha desarrollado la parte práctica de este trabajo.

Teoría de la Utilidad Multiatributo.

Tiene su origen en la Teoría de la Utilidad de Von Neumann y Morgenstern en 1944, pero es a partir de 1970 que se extiende a los problemas multicriterio debido a Fishburn y posteriormente a sus mayores exponentes Keeney y Raiffa (1976).

Es una de las metodologías más rigurosas de la teoría de la utilidad esperada, que puede decidir cuál es el mejor curso de acción en un problema dado al asignarle una utilidad a cada posible criterio (atributo) y calculando la mejor utilidad posible. Su mejor ventaja es que toma en cuenta la incertidumbre e incorpora las preferencias sobre el riesgo en estudio.

La función de utilidad multiatributo $u(x_1, \dots, x_n)$, siendo x_i los diferentes criterios considerados, presenta de acuerdo a Keeney y Raiffa tres posibles formas matemáticas: multilineal, multiplicativa y aditiva. La fórmula más habitual de la Utilidad Multiatributo es la aditiva la cual se deriva de la multiplicativa como sigue:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(x_i) + k \sum_{\substack{i=1 \\ j>i}}^n k_i \cdot k_j \cdot u_i(x_i) \cdot u_j(x_j) + \dots + k^2 \sum_{\substack{i=1 \\ j>i \\ l>j}}^n k_i \cdot k_j \cdot k_l \cdot u_i(x_i) \cdot u_j(x_j) \cdot u_l(x_l) + \dots + k^{n-1} k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n \cdot u_1(x_1) \cdot u_2(x_2) \cdot \dots \cdot u_n(x_n)$$

donde:

$u_i(x_i)$ = funciones de utilidad asociadas a cada criterio

k_i = pesos

y k es la solución a la ecuación $1 + k = \prod_{i=1}^n (1 + k \cdot k_i)$ que si cumple con la condición $\sum_{i=1}^n k_i = 1 \Rightarrow k = 0$, se llega a la forma aditiva sencilla¹⁵

$$u(x) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(x_i)$$

Resulta ser un método que requiere demasiados datos ya que en cada paso del procedimiento necesita de una cantidad muy grande de información, para poder registrar con precisión las preferencias del decisor, esto podría ser una desventaja ya que esta cantidad de datos e información puede no estar disponible para cada problema de decisión. También necesita que las preferencias del decisor sean precisas,

¹⁵ Esto únicamente se da en el caso en el que los atributos sean *mutuamente independientes en utilidad* (Keeney y Raiffa, 1993).

es decir, que éste le dé pesos específicos a cada uno de los criterios, lo que requiere supuestos más fuertes en cada paso del procedimiento; lo cual al final puede resultar subjetivo.

Proceso Analítico Jerárquico.

Es un método propuesto por L. Saaty en 1977, que se puede decir en resumen que trabaja sobre juicios y valoraciones.

Desde el punto de vista de los métodos multicriterio, una jerarquía es una representación de los problemas de decisión mediante una estructura multinivel, es decir, en cuyo primer nivel y más importante se situará el objetivo general o meta, en un segundo nivel los criterios y en un tercer nivel las alternativas; esto en una estructura básica, la cual se puede ir complementando con más niveles intermedios como por ejemplo diferentes decisores o escenarios.

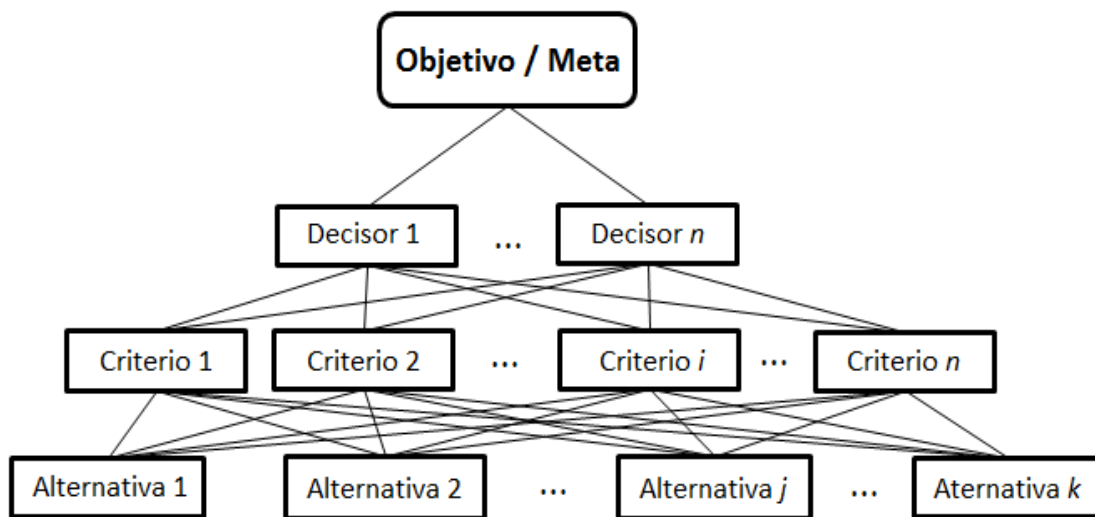


Figura IV.1 Proceso Analítico Jerárquico

Se observa en la figura que los elementos en cada nivel deben ser de la misma magnitud y se puedan relacionar con todos o casi todos los elementos que conformen el siguiente nivel.

Ya que se tienen las relaciones de jerarquía creadas, entonces el decisor deberá exponer sus preferencias o juicios de valor; lo cual llevará a cabo mediante una comparación por parejas (comparaciones binarias), que se utiliza tanto para estimar los pesos de los criterios (importancia de los criterios respecto al nivel superior), como para comparar las alternativas con respecto a los diversos criterios (es decir, se examina la preferencia de acuerdo al desempeño de cada alternativa).

Para esta comparación por parejas, comúnmente se utiliza la escala de medidas propuesta por Saaty en 1980:

Cuadro IV.2 Escala de Medidas de Saaty¹⁶

Criterios
(importancia)

Escala numérica	Escala verbal
9	A es extremadamente más importante que B
7	A es marcadamente más importante que B
5	A es más importante que B
3	A es ligeramente más importante que B
1	A es igual de importante que B
1/3	B es ligeramente más importante que A
1/5	B es más importante que A
1/7	B es marcadamente más importante que A
1/9	B es extremadamente más importante que A

Alternativas
(desempeño)

Escala numérica	Escala verbal
9	A es extremadamente mejor que B
7	A es marcadamente mejor que B
5	A es mejor que B
3	A es ligeramente mejor que B
1	A es igual que B
1/3	B es ligeramente mejor que A
1/5	B es mejor que A
1/7	B es marcadamente mejor que A
1/9	B es extremadamente mejor que A

A través de esta comparativa se obtiene la *matriz de comparaciones pareadas*

$$A = \{a_{ij}, \text{ con } a_{i=j} = 1\}$$

donde los juicios o preferencias emitidas por el decisor, reflejan la importancia o desempeño del elemento i respecto al j .

Una vez que se tengan las matrices, se realiza el cálculo de los pesos (w_j) para cada factor, esto mediante el método de *valores propios*, para obtener así el *vector de prioridades o pesos*.

Algunas críticas recibidas por el Proceso Analítico Jerárquico son:

- Que ha experimentado problemas de interdependencia entre los criterios y las alternativas.
- Que debido al enfoque de las comparaciones por parejas, también puede estar sujeto a inconsistencias en los criterios de juicio y ordenación.
- Que su forma general es susceptible de cambio de rango, esto es la posibilidad de cambio en la ordenación inicial obtenida para las alternativas al adicionar alternativas al final del proceso. En otras palabras, su capacidad para manejar problemas grandes lo hace ideal para trabajar problemas que comparan el rendimiento entre

¹⁶ Los números pares se utilizan para representar situaciones intermedias.

alternativas, pero no así para con los problemas donde las alternativas se agregan constantemente.

Lógica Difusa

Fue formulado en 1965 por Zadeh, esta lógica es una generalización de la lógica clásica (de verdadero o falso), es decir, que permite trabajar con verdades parciales que se encuentran entre el “totalmente verdadero o falso”. Se utiliza para procesos que tienen una complejidad muy alta y no existen modelos matemáticos precisos de solución sencilla, para procesos no lineales y cuando se quiere trabajar con definiciones imprecisas, inciertas o subjetivas.

Para definir un conjunto difuso partimos de un conjunto clásico, el cual se define como la agrupación de los objetos que cumplen con las propiedades que caracterizan a dicho conjunto, en términos matemáticos:

Conjunto clásico: Sea A un conjunto en el universo X y su función de pertenencia $A(x)$, $x \in X$, se define como:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Con la restricción sobre la función de pertenencia siguiente $A: X \rightarrow \{0,1\}$. Lo que significa que cuando el objeto pertenece al conjunto se le asigna el grado 1, y en el caso contrario 0.

El término “difuso” se refiere a cuando no existen límites bien definidos sobre el conjunto de trabajo para el que se aplica la descripción, lo que significa que relaja la función de pertenencia admitiendo valores intermedios en el intervalo $[0,1]$.

Conjunto difuso: Sea \tilde{A} un conjunto en el universo X y su función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$, tal que:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \tilde{A} \\ 0 & \text{si } x \notin \tilde{A} \end{cases}$$

entonces $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ que se denota como un conjunto de pares ordenados.

Los conjuntos difusos también se pueden representar de manera gráfica como una función, especialmente cuando X es del tipo continuo, las abscisas serán el universo X y las ordenadas los grados de pertenencia en el intervalo $[0,1]$. Los tipos de función de pertenencia típicas son: triangular, trapezoidal, gaussiana, gamma, S, pseudo-exponencial y trapecio extendido.

Los conceptos básicos para trabajar con conjuntos difusos son: *altura*, *núcleo*, *soporte*, α -*corte* y el *conjunto de niveles*; los cuales se pueden investigar más a fondo en la literatura especializada en la Teoría Difusa.

Entre sus desventajas la Lógica Difusa puede ser difícil de desarrollar ya que requiere de múltiples simulaciones antes de poder ser usado en el mundo real.

Razonamiento Basado en Casos

Tiene sus raíces en los trabajos realizados por Roger Schank en la década de los años 80. El Razonamiento Basado en Casos se trata de un método multicriterio que resuelve un problema de decisión a través de experiencias obtenidas por casos similares, ya sea por una persona que llamaremos el experto o por el sistema que se está utilizando. Esto proporciona la primera de sus ventajas, que es que requiere poco esfuerzo en términos de adquirir datos adicionales sobre el problema actual.

El proceso que sigue este método se lleva a cabo por un ciclo formado por cuatro subprocesos:

1. *Recuperación*. De la base de datos se toman aquellos casos similares al problema actual.
2. *Reutilización*. Se utiliza de nuevo la información de los casos similares recuperados para resolver el problema actual.
3. *Revisión*. Se evalúa la solución propuesta y en caso de ser necesario se repara si falla.
4. *Retención*. Se almacena la nueva solución para la resolución de problemas similares futuros, es decir, que se guardan las partes útiles del problema actual que acaba de ser resuelto.

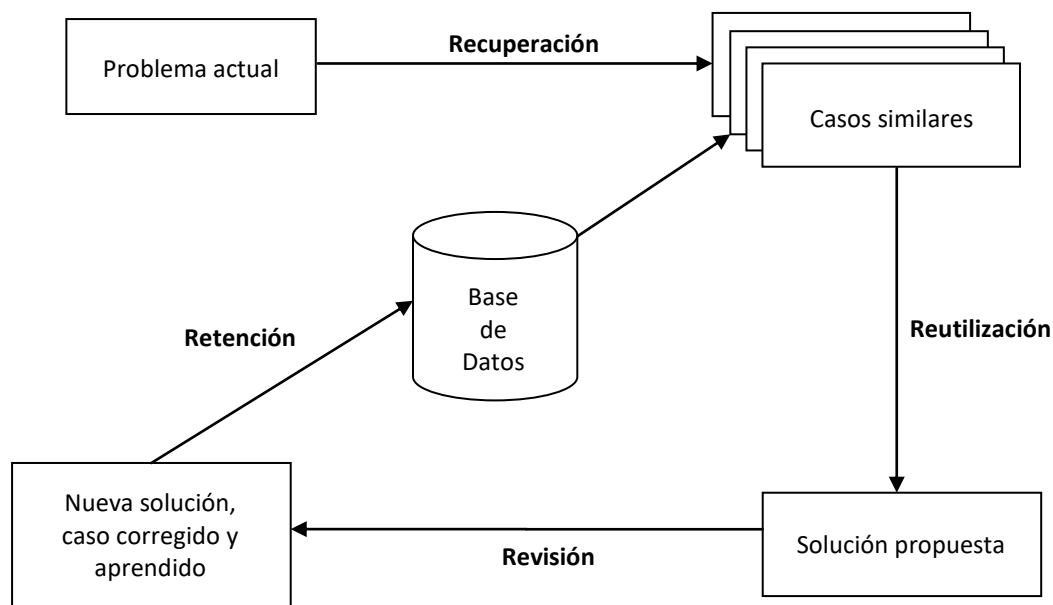


Figura IV.2 Razonamiento Basado en Casos

Los cuatro subprocesos no son una tarea única en sí misma, dentro de cada uno se llevan a cabo una serie de tareas específicas. En raras ocasiones el ciclo se realiza de manera completa sin la intervención del experto.

Algunos tipos de sistemas de Razonamiento Basado en Casos son:

- CASEY: Es un programa de diagnósticos basado en casos.
- CHEF: Se trata de un planificador basado en casos.
- HYPO: Programa interpretativo basado en casos.
- JULIA: Es un diseñador basado en casos.
- PROTOS: Se refiere a un programa de clasificación basado en casos.

Entre sus ventajas y desventajas podemos encontrar:

- Evita que los errores ocurridos en el pasado se repitan.
- Permite al experto proponer soluciones en campos que no comprende del todo, así como predecir el posible éxito de alguna solución.
- Propone soluciones de manera rápida en campos que requieran un gran proceso.
- Se puede mejorar con el tiempo, especialmente en cuanto más casos se agreguen a la base de datos.
- Su principal inconveniente es su sensibilidad a la inconsistencia en los datos.
- Se debe utilizar en campos donde ya existe un número sustancial de casos anteriores.
- El experto puede caer en la vaguedad de no evaluar las experiencias previas o dejarse predisponer por los casos similares.

Análisis Envolvente de Datos

Tiene sus inicios en el año 1978 cuando Charnes, Coopers y Rhodes lo desarrollan extendiendo el trabajo preliminar de Farrell (1957). Es una técnica de programación lineal que se utiliza para medir la eficiencia relativa de las alternativas en las situaciones donde hay múltiples entradas/ salidas o donde es difícil medirlas monetariamente.

Las alternativas que se analizan en dicha técnica son llamadas *unidades de toma de decisiones* DMU (por sus siglas en inglés *decision making unit*), concepto que permite referirse a grupos amplios de entidades como personas, compañías, países, etc.

La idea principal del Análisis Envolvente de Datos, es construir una DMU modelo que esté formada por todas las entradas y salidas que conforman a las DMU analizadas y la identificación de la *frontera eficiente*. Todas las DMU que se encuentren en la frontera eficiente serán aquellas que funcionen al ciento por ciento para las entradas y salidas seleccionadas, y aquellas que se encuentren fuera de dicha frontera serán DMU ineficientes y se podrá valorar relativamente esta ineficiencia.

Cuando sólo se tiene una entrada y una salida, la eficiencia se mide como:

$$E_0 = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}}$$

pero cuando se tienen varias variables de entradas o salidas, entonces la eficiencia se mide como una razón ponderada:

$$E_0 = \frac{\text{Suma ponderada de Salidas}}{\text{Suma ponderada de Entradas}}$$

El objetivo de esta técnica es que cada DMU alcance su máximo valor eficiente.

Partiendo del modelo matemático de Charnes, Coopers y Rhodes en el que la función objetivo es:

$$\text{Max } E_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

donde:

s = número de salidas que se valoran

u_r = peso de la r -ésima variable de salida

y_{rj} = valor de la r -ésima variable de salida en la j -ésima DMU

m = número de entradas que se valoran

v_i = peso de la i -ésima variable de entrada

x_{ij} = valor de la i -ésima variable de entrada en la j -ésima DMU

n = número de unidades de decisión, DMU

Se tiene que el problema de programación lineal a resolver es:

$$\begin{aligned} \text{Max } E_j &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \text{s. a. } \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 & \forall j = 1, \dots, n \\ u_r, v_i > 0 & \forall r = 1, \dots, s ; i = 1, \dots, m \end{array} \right. \end{aligned}$$

Entre algunas de sus ventajas se encuentran:

- Es capaz de manejar múltiples entradas y salidas, a pesar de que tengan distintas unidades de medida.
- La eficiencia puede ser analizada y cuantificada.
- A partir de una combinación lineal de DMU “pares” reales, más eficientes, se construye una DMU ideal la cual es comparada con las DMU.

Y entre sus desventajas:

- No trabaja con datos imprecisos y asume que todos los datos de entrada y salida son exactamente conocidos.

- Al excluir variables no consideradas se da lugar a la aparición de ineficiencias.
- Es útil para estimar la eficiencia o ineficiencia relativa, pero no cuando se quiera estimar una de carácter “absoluto” para obtener resultados ideales.
- Al tratarse de una técnica no paramétrica es difícil formular test de hipótesis estadísticos.

Cabe mencionar que los siguientes métodos no son tan conocidos como los anteriores, pero no por eso son menos importantes.

Técnica Simple de Clasificación Multiatributo (SIMPLEX Multiatributo)

Técnica propuesta por Edwards en 1977, la cual proporciona una manera fácil de aplicar los principios de la Teoría de la Utilidad Multiatributo, está basada en un modelo aditivo lineal. Esto significa que el *valor* de una alternativa dada se calcula como la suma total de multiplicar el valor de cada atributo (criterio) por su peso, es decir, una media lineal ponderada.

Edwards propuso 10 pasos para llevar a cabo esta técnica:

- 1) Identificar a los decisores.
- 2) Identificar el problema.
- 3) Identificar las alternativas a evaluar.
- 4) Identificar los atributos.
- 5) Clasificar los atributos en orden de importancia.
- 6) Determinar el peso de cada atributo.
- 7) Calcular un promedio ponderado de los pesos asignados a cada atributo para cada alternativa (w_i).
- 8) Medir la eficiencia de cada alternativa en cada atributo (s_{ji}).
- 9) Realizar un análisis de sensibilidad, calculando utilidades para cada alternativa

$$U_j = \sum_i w_i * s_{ji}$$

donde:

s_{ji} = medida de la alternativa j en el atributo i

w_i = peso del i -ésimo atributo

- 10) Tomar una decisión, seleccionando la alternativa con mayor utilidad. En el caso de que exista una restricción de presupuesto entonces se obtiene el ratio U_j/C_j donde C_j es el costo de cada alternativa, se elegirán las alternativas con mayores ratios hasta que el presupuesto se acabe.

Su simplicidad al permitir cualquier tipo de técnicas de asignación de peso es lo que hace bastante popular a este método. Requiere dos suposiciones, a saber, la *independencia de la utilidad* y la *independencia preferencial*.

Programación por Metas

En 1955 Charnes, Cooper y Ferguson fueron los primeros en realizar la aplicación de la Programación por Metas.

Es un método de regresión en el cual lo que se busca es minimizar la distancia absoluta. Su planteamiento se utiliza para resolver un problema de optimización multicriterio como un programa lineal que mantenga el equilibrio entre los pros y contras de los criterios en conflicto. En lugar de obtener soluciones óptimas, se obtienen soluciones *satisfacientes*, es decir, que no se alcanzan todas las metas sino más bien todas las metas se comprometen.

Sus características son que:

- La función objetivo siempre buscará minimizar la falta de logro de la metas.
- A cada meta le corresponde una restricción.
- Las metas se satisfacen en orden de acuerdo a su prioridad, es decir, las de prioridad baja no se toman en cuenta hasta haber cumplido las altas.

Los pasos para la formulación del problema son:

- I. Definir las variables de decisión.
- II. Especificar las metas en orden de importancia.
- III. Establecer los atributos relevantes para el problema.
- IV. Determinar el nivel de aspiración de cada atributo.
- V. Aplicar variables de desviación positivas o negativas.

Así la forma general del método considerando que existen t metas es

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i$$

donde:

$f_i(x)$ = expresión matemática del atributo i -ésimo

n_j = variables de desviación negativa, mide la falta de logro de una meta respecto a su nivel de aspiración

p_j = variables de desviación positiva, mide el exceso de logro de una meta respecto a su nivel de aspiración

Los tres tipos de *función de logro* son:

1. Programación por metas ponderadas.

Se trata de minimizar la suma de las distancias, que se pueden ponderar, a unas metas determinadas.

$$\min \sum_{j=1}^t w_1 * n_j + w_2 * p_j$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m \beta_i x_{ij} + n_j - p_j = y_j, \quad j = 1, \dots, t$$

$$n_j, p_j \geq 0$$

donde:

w_i = ponderación

n_j = no superación por parte de una meta respecto a su nivel de aspiración

p_j = superación por parte de una meta respecto a su nivel de aspiración

β_i = coeficiente asociado a la variable

x_{ij} = valor del criterio en la meta j , con i siendo el número total de variables

y_j = valor total de la meta, con j siendo el número total de metas

2. Programación por metas MINMAX o Chebyshev.

En este caso lo que se intenta minimizar es la desviación máxima de entre todas las desviaciones posibles.

$$\min z = D$$

s.a.

$$\frac{1}{k_j} (u_i n_i + v_i p_i) \leq D \quad i = 1, \dots, Q$$

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \quad i = 1, \dots, Q$$

$$n_i, p_i \geq 0$$

3. Programación por metas extendida.

Es un conjunto de las dos programaciones anteriores, es decir, que se trata de minimizar la suma de las distancias y la desviación máxima.

$$\min z = (1 - \lambda)D + \lambda \sum_{i=1}^Q \frac{1}{k_j} (u_i n_i + v_i p_i)$$

s.a.

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i \quad i = 1, \dots, Q$$

$$(1 - \lambda)(n_i + p_i) \leq D \quad i = 1, \dots, Q$$

$$n_i, p_i \geq 0$$

donde:

$\lambda = 0$ quiere decir que estamos en la programación por metas MINMAX

$\lambda = 1$ quiere decir que estamos en la programación por metas ponderadas

Ponderación Aditiva Simple

Es un método compensatorio de ponderación (Churchman y Ackoff en 1954), el cual permite combinar los criterios para que el decisor pueda definir cuánto está dispuesto a ceder de cierto criterio a fin de obtener más de otro en determinada alternativa.

Es uno de los métodos más utilizados debido a su simplicidad, se basa en un promedio ponderado, asigna una ponderación (peso) a cada criterio basado en el nivel de importancia propio de cada uno y evalúa la utilidad de cada alternativa en cada criterio.

Su proceso consiste en tres pasos:

- 1) Este paso tiene varias fases.
 - a) Se construye una matriz de comparación ($n \times n$) para comparar uno a uno cada criterio con otro criterio, esto se realiza mediante la escala de medidas propuesta por Saaty (vista anteriormente).

Cuadro IV.3 Escala de Medidas de Saaty en el método Ponderación Aditiva Simple

Nivel de importancia	Significado	Definición
1	Misma importancia	Dos alternativas contribuyen igual al objetivo.
2	Importancia débil o leve	
3	Importancia moderada	La experiencia y el juicio favorecen ligeramente una alternativa sobre otra
4	Importancia más moderada	
5	Importancia fuerte	La experiencia y el juicio favorecen fuertemente una alternativa sobre otra
6	Importancia más fuerte	
7	Importancia muy fuerte	Una alternativa es favorecida muy fuertemente sobre otra
8	Importancia demasiado fuerte	
9	Extrema importancia	Los resultados evidentemente favorecen una alternativa sobre otra

- b) Para cada comparación, se decide cuál de los dos criterios es más importante y se le asigna una puntuación para mostrar dicha importancia. Se computa cada elemento de la matriz de comparación por el total de su columna y se calcula el vector de prioridad mediante el promedio de cada fila.
- c) El vector de suma ponderada se obtiene multiplicando la matriz de comparación por el vector de prioridad. Dividiendo cada elemento del vector de suma ponderada entre su respectivo elemento del vector de prioridad y sacando el promedio de este nuevo vector se obtiene λ_{max} .
- d) Se calcula el Índice de Consistencia (IC):

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

donde n es el tamaño de la matriz.

- e) Se calcula el Ratio de Consistencia (RC):

$$RC = \frac{IC}{IA}$$

donde el valor de IA se obtiene de acuerdo al valor de n dentro de una matriz de juicio.

- 2) Se construye una matriz de decisión ($m \times n$) donde m son las alternativas y n los criterios, los de valores de cada alternativa son obtenidos con la escala de Saaty. Y se calcula la matriz de decisión normalizada para los criterios positivos:

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_j^*} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

donde r_j^* es el número máximo de r en la columna j

Y para los criterios negativos:

$$n_{ij} = \frac{r_j^{\min}}{r_{ij}} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

- 3) Sea a_i la alternativa, x_{ij} el valor asignado a la alternativa i en el criterio j y w_j la ponderación o peso asignado al criterio j , entonces el promedio ponderado para cada alternativa se calculará mediante la función de utilidad siguiente:

$$U_i(a_i) = \sum_{j=1}^m w_j(x_{ij})$$

La mejor alternativa a^* será entonces

$$a^* = \{U_i(a_i) | \max_i U_i(a_i) | \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Técnica para la Ordenación de Preferencias por Similitud a la Solución Ideal

Es un método simple que ordena las preferencias por su similitud a una solución ideal, por lo tanto es un método de ranking. Fue desarrollado en 1981 por Hwang y Yoon.

Considera las alternativas como puntos del plano cartesiano, cuando el problema tiene sólo dos criterios; o como puntos en el espacio, para problemas con más atributos. El método consiste en definir una alternativa *ideal* ficticia positiva (vector compuesto por los mejores valores del j -ésimo criterio) y una negativa *anti-ideal* (vector con los peores valores en todos los criterios respecto de todas las alternativas), y medir la distancia euclidiana entre cada punto asignado a cada alternativa al punto asignado a la alternativa ideal; así la mejor alternativa será aquella que tenga la menor distancia a la alternativa ideal positiva y la más lejana a la alternativa negativa anti-ideal.

Los pasos para desarrollar esta técnica son:

- I. Construir la matriz de decisión.

	w_1	w_2	\dots	w_j	\dots	w_n
	c_1	c_2	\dots	c_j	\dots	c_n
a_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1j}	\dots	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2j}	\dots	x_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
a_i	x_{i1}	x_{i2}	\dots	x_{ij}	\dots	x_{in}
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
a_m	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mj}	\dots	x_{mn}

donde x_{ij} es la evaluación de la alternativa i en el criterio j , y w_j es el peso de cada criterio.

II. Normalizar la matriz de decisión.

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{ij})^2}}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

III. Construir la matriz de decisión normalizada ponderada.

$$v_{ij} = w_j \times n_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

IV. Determinar la alternativa ideal positiva y negativa.

$$a^+ = \{v_1^+, \dots, v_n^+\} = \left\{ \left(\max_i v_{ij}, j \in J \right), \left(\min_i v_{ij}, j \in J' \right) \right\}$$

$$a^- = \{v_1^-, \dots, v_n^-\} = \left\{ \left(\min_i v_{ij}, j \in J \right), \left(\max_i v_{ij}, j \in J' \right) \right\}$$

donde J está asociado a los criterios que indican ganancias o beneficio y J' con los de pérdidas o costes.

V. Calcular las distancias de cada alternativa a la alternativa ideal positiva y a la negativa.

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}, \quad i = 1, \dots, m$$

- VI. Calcular el índice de proximidad relativa de cada alternativa a la alternativa ideal positiva y negativa.

$$R_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\text{si } R_i \cong 1 \Rightarrow a_i = a^+$$

$$\text{si } R_i \cong 0 \Rightarrow a_i = a^-$$

- VII. Establecer el orden de preferencias de las alternativas de acuerdo a su índice de proximidad relativa.

- Se ordenan las alternativas de manera decreciente, empezando por la que más se acerca a la solución anti-ideal negativa. La mejor alternativa será la que tenga el R_i más alto.

PROMETHEE

PROMETHEE (por sus siglas en inglés Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation), se trata de un método de superación introducido por Brans en 1982 y más tarde desarrollado junto con Mareschal y Vincke en 1984.

Dicho método en resumen se trata de los siguientes pasos:

- Definición del problema.
- Identificación de las alternativas.
- Designación de los criterios.
- Creación de la matriz alternativas-criterios.
- Asignación de las preferencias (pesos).
- Clasificación parcial (PROMETHEE I).
- Clasificación total (PROMETHEE II).

En términos matemáticos se trata de establecer un orden jerárquico en el conjunto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ de n alternativas mediante la evaluación de la familia de q criterios $C = \{c_1, \dots, c_q\}$. Teniéndose así la matriz de evaluaciones $n \times q$, donde cada fila corresponde a una alternativa y cada columna a un criterio.

	$c_1(\cdot)$	$c_2(\cdot)$	\dots	$c_j(\cdot)$	\dots	$c_q(\cdot)$
a_1	$c_1(a_1)$	$c_2(a_1)$	\dots	$c_j(a_1)$	\dots	$c_q(a_1)$
a_2	$c_1(a_2)$	$c_2(a_2)$	\dots	$c_j(a_2)$	\dots	$c_q(a_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
a_i	$c_1(a_i)$	$c_2(a_i)$	\dots	$c_j(a_i)$	\dots	$c_q(a_i)$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
a_n	$c_1(a_n)$	$c_2(a_n)$	\dots	$c_j(a_n)$	\dots	$c_q(a_n)$

Para determinar la relación de dominio que existe entre las alternativas y tomar una decisión final, se llevan a cabo las siguientes fases:

1) Definir el criterio generalizado.

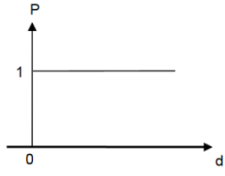
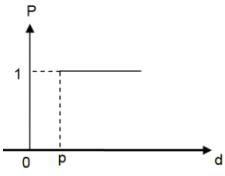
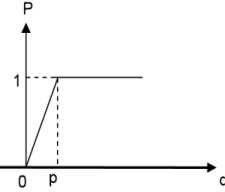
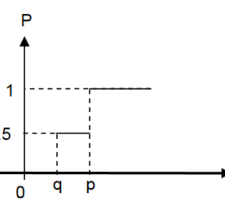
A cada criterio c_j se le asocia un criterio generalizado $P_j(d_j)$, el cual valorará la preferencia de una alternativa a_i respecto a otra a_j , a través de la función $d_j(a_i, a_k) = c_j(a_i) - c_j(a_k)$ donde $d_j(a_i, a_k)$ es la diferencia entre la comparación de dos alternativas para el criterio c_j . Brans et al. proponen seis tipos de criterios generalizados (pero el decisor puede otros de acuerdo a sus necesidades personales), para los cuales el decisor deberá fijar 0, 1 ó 2 parámetros, dichos parámetros son:

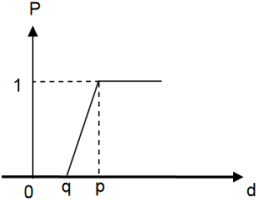
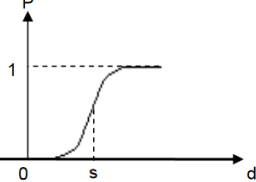
q = umbral de indiferencia, es decir, mayor valor de $d_j(a_i, a_k)$ por debajo del cual las alternativas a_i y a_k se consideran indiferentes.

p = umbral de preferencia estricta, es decir, menor valor de $d_j(a_i, a_k)$ por encima del cual se tiene una preferencia estricta de a_i sobre a_j .

s = parámetro entre los valores de p y q el cual representa el punto de inflexión de la función de preferencia gaussiana.

Cuadro IV.4 Tipos de Criterios Generalizados

Tipo	Funciones de preferencia	Definición	Parámetros necesarios
I (criterio usual o real): Asigna el valor unidad, siempre que $d_j(a_i, a_k)$ sea mayor que cero.		$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j \leq 0 \\ 1 & \text{si } d_j > 0 \end{cases}$	—
II (cuasi- criterio): Asigna el valor unidad, siempre que $d_j(a_i, a_k)$ supere el umbral de indiferencia q .		$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j \leq q_j \\ 1 & \text{si } d_j > q_j \end{cases}$	q
III (pseudo-criterio o de preferencia lineal): Asigna el valor cero si $d_j(a_i, a_k)$ es nula, y el valor unidad cuando $d_j(a_i, a_k)$ supera el umbral de preferencia p .		$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j \leq 0 \\ \frac{ d_j }{p_j} & \text{si } d_j \leq p_j \\ 1 & \text{si } d_j > p_j \end{cases}$	p
IV (criterio de nivel): Asigna el valor cero, si la diferencia $d_j(a_i, a_k)$, está por debajo del umbral de indiferencia q , 0.5 si está entre el umbral de indiferencia q y preferencia p ; y la unidad si se encuentra por encima del umbral de preferencia p .		$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j \leq q_j \\ \frac{1}{2} & \text{si } q_j < d_j \leq p_j \\ 1 & \text{si } d_j > p_j \end{cases}$	q, p

<p>V (preferencia lineal y área de indiferencia): Tiene forma lineal, pero aquí se incluye un umbral de indiferencia q, por debajo del cual, se asigna un valor cero.</p>		$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j \leq q_j \\ \frac{ d_j - q_j}{p_j - q_j} & \text{si } q_j < d_j \leq p_j \\ 1 & \text{si } d_j > p_j \end{cases}$	q, p
<p>VI (criterio gaussiano): Su punto de inflexión está definido por el parámetro s, antes visto.</p>		$P_j(d_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_j \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d_j^2}{2s_j^2}} & \text{si } d_j > 0 \end{cases}$	s

2) Construir los índices de preferencia multicriterio.

Se define el índice $\pi(a_i, a_k)$, el cual medirá el grado en que se prefiere a a_i sobre a_k en todos los criterios y ; $\pi(a_k, a_i)$ medirá el grado en que a_k es preferido a a_i :

$$\begin{cases} \pi(a_i, a_k) = \sum_{j=1}^n w_j P_j(a_i, a_k) \\ \pi(a_k, a_i) = \sum_{j=1}^n w_j P_j(a_k, a_i) \end{cases}$$

donde $w_j > 0$ con $j = 1, \dots, n$ es el peso de importancia para el criterio j (no dependen de los valores asociados al criterio), siendo $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Con esto el índice de preferencia cumple las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \pi(a_i, a_i) = 0 \\ 0 \leq \pi(a_i, a_k) \leq 1 \\ 0 \leq \pi(a_k, a_i) \leq 1 \\ 0 \leq \pi(a_i, a_k) + \pi(a_k, a_i) \leq 1 \end{cases}$$

de donde se deduce que:

$$\begin{cases} \pi(a_i, a_k) \sim 0 \Rightarrow \exists \text{ una preferencia total débil de } a_i \text{ sobre } a_k \\ \Rightarrow \\ \pi(a_i, a_k) \sim 1 \Rightarrow \exists \text{ una preferencia total fuerte de } a_i \text{ sobre } a_k \end{cases}$$

3) Tomar la decisión.

Partiendo del punto anterior se definen dos flujos de dominancia (o superación):

- *Flujo de salida o positivo*

Representa el carácter dominante de una alternativa a_i sobre las demás alternativas.

$$\varphi^+(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{a_k \in A} \pi(a_i, a_k)$$

- *Flujo de entrada o negativo*

Representa la debilidad de una alternativa, es decir, como la alternativa a_i es dominada por las demás alternativas.

$$\varphi^{-}(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{a_k \in A} \pi(a_k, a_i)$$

Y a partir de estos se infiere que la mejor alternativa será la que tenga un mayor flujo positivo y al mismo tiempo un menor flujo negativo.

Tomando en cuenta los flujos antes definidos se puede tener un orden parcial entre las alternativas, el cual es llamado método PROMETHEE I, y nos ofrece información sobre la incomparabilidad entre éstas. Para tener una información más clara sobre las preferencias entre alternativas (orden completo), entonces se utiliza el método PROMETHEE II, dentro del cual se define el *flujo neto de dominancia*:

$$\varphi(a_i) = \varphi^{+}(a_i) - \varphi^{-}(a_i)$$

de modo que

$$\begin{cases} a_i \text{ superará a } a_k \text{ si } \varphi(a_i) > \varphi(a_k) \\ a_i \text{ será indiferente a } a_k \text{ si } \varphi(a_i) = \varphi(a_k) \end{cases}$$

ELECTRE

El método ELECTRE (en francés: ELimination Et Choix Traduisant la REalité, en inglés: ELimination and Choice Expressing the REality), en español se traduce como ELECTRA y significa Eliminación y Elección como Traducción de la Realidad, fue concebido en 1965 (ELECTRE I). En 1966 R. Benayoun, B. Roy y B. Sussman publican sobre él en un reporte de investigación, sin embargo no fue ampliamente conocido sino hasta el año 1968 que Bernard Roy publicó sobre el método mejorado en RIRO (*Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, en español *Revista de Informática e Investigación de Operaciones*).

Desde entonces el método fue evolucionando y dio lugar a una versión "no oficial", ELECTRE IV; esta versión tuvo en cuenta la noción de umbral de veto. Posteriormente apareció una versión llamada ELECTRE IS (Roy y Skalka en 1985), la cual se utilizó para modelar situaciones en las que los datos eran imperfectos. Actualmente ésta es la versión de los métodos ELECTRE más utilizada para los problemas de decisión multicriterio.

Pero además de estos aparecieron los demás métodos ELECTRE:

- ELECTRE II (Roy y Bertier en 1963): trata el problema de ordenar las acciones de la mejor opción a la peor.
- ELECTRE III (Roy en 1978): trata el problema de ordenar las acciones pero introduciendo el uso de *pseudo-criterios* y relaciones binarias difusas de superación.
- ELECTRE IV (Roy y Hugonnard en 1982): trata el problema de ordenar las acciones pero sin utilizar los coeficientes de importancia de los criterios.

- ELECTRE TRI (Roy en 1981 y Yu Wei en 1992): trata el problema de clasificar las acciones a través de categorías predefinidas y ordenadas, es decir, el procedimiento tricotómico (enfoque basado en el típico árbol de decisiones).

Veamos algunas de las características principales que comparten los métodos ELECTRE.

En general para modelar las preferencias utilizan relaciones binarias de superación, que se simbolizan con S , lo que significa *al menos tan bueno como*. Teniendo en cuenta dos alternativas a y b , las cuatro relaciones que se pueden dar son:

- aSb pero no se da bSa , es decir, $aPb = a$ es *estrictamente preferido* a b
- bSa pero no se da aSb , es decir, $bPa = b$ es *estrictamente preferido* a a
- aSb y bSa , es decir, $aIb = a$ es *indiferente* a b
- No se da aSb ni bSa , es decir, $aRb = a$ es *incomparable* con b

Nótese que se utiliza la relación, R , para describir la imposibilidad del decisor para comparar dos alternativas.

La principal ventaja de las relaciones de superación antes vistas es que no se da la propiedad de transitividad de preferencias o de comparabilidad, así si aSb y bSe esto no implica forzosamente que aSe .

Las relaciones de superación antes mencionadas se basan en dos conceptos, los cuales se deben cumplir para que éstas se den:

Concordancia. Para que una de las relaciones de superación sea válida, una mayoría suficiente de los criterios debe estar a favor de ella.

No discordancia. Cuando la condición de concordancia se cumple, ninguno de los criterios que quedan en la minoría, se opone fuertemente a la relación de superación.

Para ayudar a la modelización de los métodos ELECTRE, se puede crear un grafo $G = (V, U)$, donde V es el conjunto de vértices y U el conjunto de arcos. Para cada alternativa $a \in A$ se le asocia un vértice $i \in V$ y para cada par de alternativas $(a, b) \in A$ el arco (i, l) existe ya sea si aPb o si aIb . Una alternativa a superará a una b si y sólo si el arco (i, l) existe. Si no existe un arco entre los vértices i y l , esto significará que a y b son *incomparables*; si existen dos arcos entre dos alternativas (en direcciones opuestas), hay una *indiferencia* entre a y b .

En estos métodos a los criterios se les asocia dos conjuntos de parámetros: los *coeficientes de importancia* y los *umbrales de veto*. Los primeros se refieren a los “pesos”, los cuales ayudan a ver el valor que aporta un criterio para que se dé cierta

relación de superación. Los segundos en cambio, muestran el poder que tiene un criterio para estar en contra de “*a* supera a *b*”.

Para tener en cuenta el carácter imperfecto de la evaluación de las alternativas, algunos métodos ELECTRE hacen uso de los umbrales de *discriminación* (preferencia o indiferencia), lo cual conlleva a un modelo de *pseudo-criterio* sobre cada criterio; es decir, modelan situaciones donde la diferencia entre las evaluaciones de dos alternativas sobre un mismo criterio puede:

- Justificar la preferencia en favor de una de las dos alternativas (umbral de preferencia, p_j);
- Ser compatible con la indiferencia entre las dos alternativas (umbrales de indiferencia, q_j).
- Ser interpretada como una incertidumbre entre optar por una preferencia o una indiferencia entre las dos alternativas.

Dichos umbrales pueden ser constantes o variables, cuando son de tipo variable, entonces se pueden diferenciar entre *directos* (en este caso se toma en cuenta la evaluación de la mejor alternativa) e *inversos* (se calculan utilizando la peor evaluación).

Para asignar el valor tanto a los pesos como a los distintos umbrales, se tienen dos vías, la directa que es cuando el decisor proporciona los valores de acuerdo a su información y la indirecta, en la cual los valores son calculados a partir de las preferencias del decisor y utilizando técnicas como SRF que se verá más adelante.

La estructura de los métodos ELECTRE comprenden dos fases:

- i. Construcción de una o varias relaciones de superación, comparando cada par de alternativas a través de los índices de concordancia y discordancia antes mencionados.
- ii. Explotación, la cual ayuda a elaborar recomendaciones sobre los resultados obtenidos en la primera fase y cuya naturaleza depende de la problemática a resolver.

A continuación se verán un poco más a detalle las características de cada uno de los métodos ELECTRE, clasificados de acuerdo a la problemática a la que pertenecen:

⇒ **De selección.**

El objetivo de este tipo de problemas es ayudar a los decisores a seleccionar un conjunto de alternativas (eficientes) lo más pequeño posible, para que al final puedan elegir una sola.

ELECTRE I

Este método ya se ha quedado en un punto de vista teórico y/o académico, dado el mundo real. Ya que es muy sencillo pero sólo puede aplicarse cuando todos los criterios han sido codificados en escalas numéricas con rangos idénticos.

En tal caso se podría afirmar que a es *al menos tan buena como* b , aSb , cuando se mantienen las dos condiciones siguientes:

- Concordancia

El valor de la suma de los pesos asociados a los criterios debe ser lo suficientemente grande para soportar la afirmación. Dicha suma se define como el *índice de concordancia* (asumiendo que $\sum_{j \in J} w_j = 1$, donde J es el conjunto de índices de los criterios):

$$c(aSb) = \sum_{\{j: g_j(a) \geq g_j(b)\}} w_j$$

donde $\{j: g_j(a) \geq g_j(b)\}$ es el conjunto de índices para todos los criterios que pertenecen a la suma, es decir, el valor de este índice debe ser tan grande o igual a un *umbral mínimo de concordancia* (s) dado, cuyo valor se encuentra dentro de $[0.5, 1 - \min_{j \in J} w_j]$, lo que significa, $c(aSb) > s$. Cuando se tiene el caso $g_j(a) = g_j(b)$ algunos investigadores asignan la mitad del peso a cada alternativa mientras que otros el peso completo.

- No discordancia

Se mide por el *índice de discordancia*:

$$d(aSb) = \max_{\{j: g_j(a) < g_j(b)\}} \{g_j(b) - g_j(a)\}$$

el cual mide una coalición discordante, entendiéndose que si su valor sobrepasa un *umbral máximo de discordancia* dado, u , la afirmación ya no es válida; lo contrario sucede si $d(aSb) < u$.

Ambos índices deben ser calculados para cada par de alternativas (a, b) en el conjunto A , donde $a \neq b$. Tal procedimiento conduce a que para cada par de alternativas se puede sólo una de las relaciones de superación vistas al inicio de este apartado.

Dentro de este marco de preferencia-indiferencia, con opción a la incomparabilidad, se tenía el problema de cómo seleccionar la mejor alternativa o el subconjunto de alternativas al que los decisores deben prestar atención.

Para resolver un problema mediante el método ELECTRE I se siguen los siguientes pasos (los cuales sirven de base para el resto de los métodos con sus respectivas modificaciones):

- 1º Cálculo de los valores de la matriz de decisión, determinando los valores de cada alternativa en cada criterio, así como los valores de w_j .
- 2º A partir de la matriz de decisión, calcular los índices de concordancia para obtener la matriz de concordancia.
- 3º Normalizar la matriz de decisión, lo cual se realiza dividiendo cada elemento de la matriz de decisión entre la diferencia máxima de valores en las puntuaciones de las alternativas para cada criterio:

$$g'_j(a) = \frac{g_j(a)}{\max_{\{j \in J\}} |g_j(h) - g_j(k)|} \quad \text{con } h \neq k$$

- 4º Ponderar la matriz de decisión normalizada, esto es cada columna de la misma se multiplica por el peso preferencial correspondiente:

$$g''_j(a) = w_j \cdot g'_j(a)$$

- 5º De la matriz de decisión normalizada y ponderada, se deducen los índices de discordancia para obtener la matriz de discordancia.
- 6º Cálculo de los umbrales de concordancia y discordancia, estos valores suelen ser la media de los valores de la matriz de concordancia y de discordancia respectivamente, así para un conjunto de m alternativas se tienen:

- Umbral mínimo de concordancia

$$s = \frac{\sum c(aSb)}{m(m-1)}$$

- Umbral máximo de discordancia

$$u = \frac{\sum d(aSb)}{m(m-1)}$$

- 7º Cálculo de la matriz de concordancia dominante, así como de la matriz de discordancia dominante. Las dos se construyen respectivamente, a partir de su matriz y de su umbral correspondientes, asignando a cada elemento de cada matriz los valores siguientes y obteniendo:

- Matriz de concordancia dominante

$$cd_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & \text{si } c(aSb) \geq s \\ 0 & \text{si } c(aSb) < s \end{cases}$$

- Matriz de discordancia dominante

$$dd_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(aSb) < v \\ 0 & \text{si } d(aSb) \geq v \end{cases}$$

- 8º Tomando como base las matrices anteriores, se construye la matriz de concordancia agregada, calculando cada elemento como:

$$cd'_{(a,b)} = cd_{(a,b)} \cdot dd_{(a,b)}$$

- 9º Construcción del grafo de decisión. A partir de dicho grafo, la fase de explotación consiste en agrupar las alternativas en un subconjunto tan pequeño como sea posible, así el subconjunto buscado donde se pueda seleccionar la mejor alternativa estará constituido por el *núcleo del grafo* resultante.

Este núcleo está formado por las alternativas que no se superan entre sí (no existen arcos entre sus vértices), y es necesario que el resto de las alternativas estén dominadas al menos por una alternativa del núcleo, esto es, deben salir arcos a los vértices que no forman el núcleo al menos desde un vértice del núcleo.

ELECTRE I tiene poca capacidad de discriminación cuando se da el caso de tener un único núcleo, varios o ninguno, por lo que desarrolla el método ELECTRE IS.

ELECTRE IV

Aparece como un pseudo-nombre para el método anterior, es decir se trata de introducir al método ELECTRE I un *umbral de veto* (v_j), el cual hace posible que los decisores y/o analistas superen las dificultades que representaban la heterogeneidad de las escalas. Sin importar el tipo de escala, este método siempre es capaz de seleccionar la mejor alternativa o el subconjunto de alternativas que los decisores deben analizar.

El concepto de umbral de veto se refiere, a la definición de un límite superior más allá del cual la discordancia sobre la afirmación aSb no puede sobrepasar y se permite entonces una superación. De hecho, mientras que el nivel de discordancia está relacionado con la escala del criterio g_j en términos absolutos para una alternativa $a \in A$, el umbral de veto está relacionado con las diferencias entre las preferencias de dos alternativas, para cierto criterio $g_j(a)$ y $g_j(b)$.

En términos matemáticos la única diferencia entre estos dos primeros métodos es la condición de discordancia, que ahora llamaremos *condición de no veto*:

$$g_j(a) + v_j(g_j(a)) \geq g_j(b), \quad \forall j \in J$$

Esta condición implica que entre todos los criterios que se oponen a la afirmación aSb ninguno debe superar el umbral de veto. Por lo tanto se tiene a la matriz de discordancia dominante como:

$$dd_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \leq v_j(g_j(a)) \\ 0 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) > v_j(g_j(a)) \end{cases} \quad \forall j \in J$$

Aún así este método no está del todo completo ya que prevalece el problema del conocimiento imperfecto del mundo real.

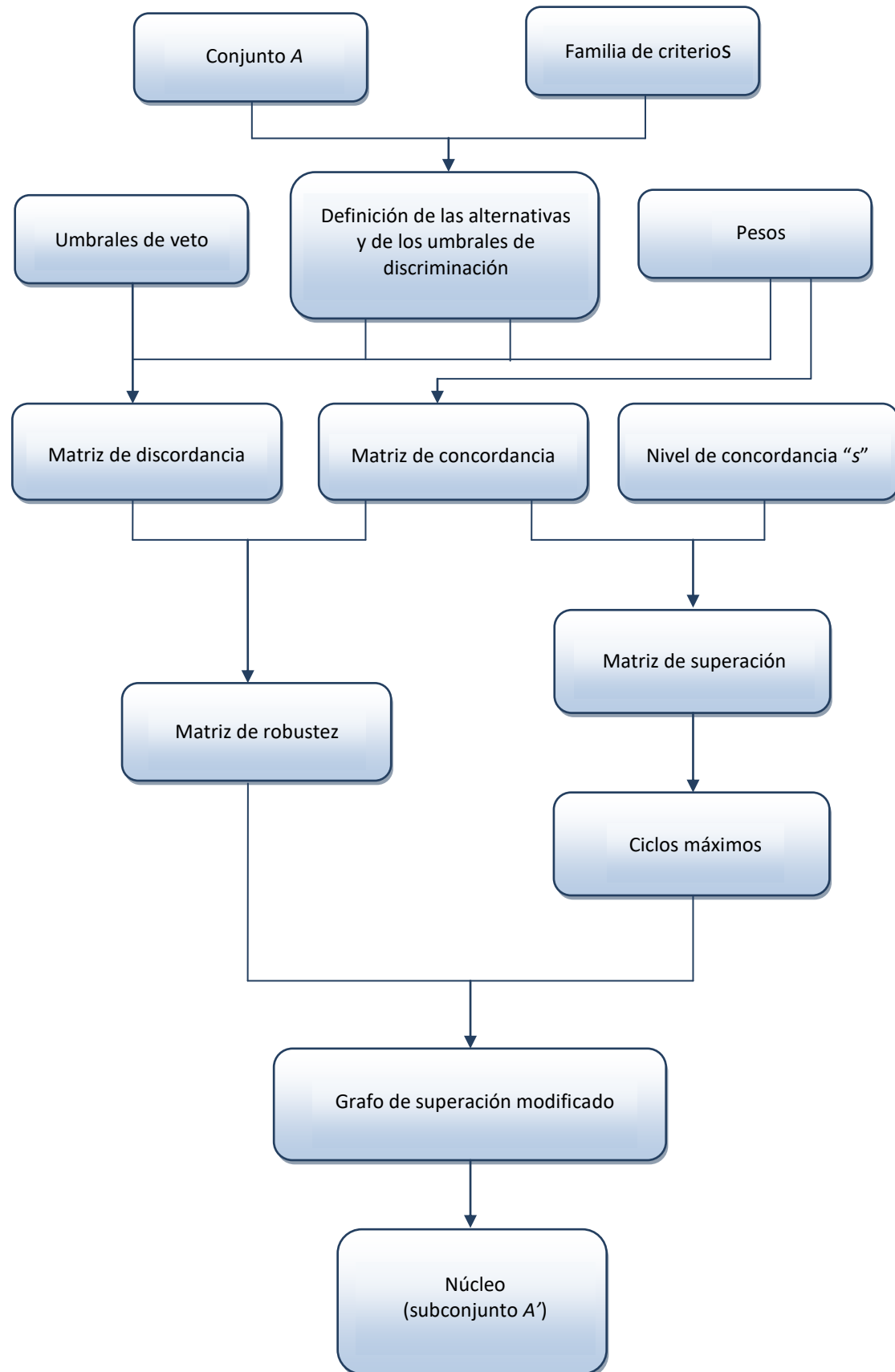
ELECTRE IS

Es una extensión del método ELECTRE I y ELECTRE Iv, su propósito es responder a la problemática de selección: este método consiste en seleccionar un subconjunto A' de un conjunto finito A de alternativas evaluadas sobre una familia de criterios coherentes cuantitativos o cualitativos (*pseudo-criterios*); este subconjunto será lo más pequeño posible pero contendrá las “mejores” alternativas con el objetivo de seleccionar al final una sola.

Para seleccionar el subconjunto A' , el método tiene dos fases (ver la figura IV.3):

- ✓ Elaboración de una relación de superación para cada par de alternativas del conjunto A .
- ✓ Selección del subconjunto A' a partir de la matriz de superación.

Figura IV.3 Método ELECTRE IS¹⁷



¹⁷ Basado en la Fig. 1.1 del Manuel d'utilisation d'Electre IS pp. 4.

Se entiende por *pseudo-criterio* a una función g_j , asociada a los umbrales $p_j(g_j(a))$ y $q_j(g_j(a))$, que satisfacen la condición de que $\forall a \in A$, $p_j(g_j(a)) + g_j(a)$ y $q_j(g_j(a)) + g_j(a)$ son funciones monótonas, no decrecientes de $g_j(a)$, siendo $p_j(g_j(a)) \geq q_j(g_j(a))$. Se tienen dos casos especiales el *cuasi-criterio* que se da cuando los umbrales son iguales $p_j(g_j(a)) = q_j(g_j(a))$; y *criterio verdadero* que es cuando se cumple $p_j(g_j(a)) = q_j(g_j(a)) = 0$.

El pasar de una situación de indiferencia a una de preferencia estricta, es a veces muy violento, por lo que esta definición permite la introducción de una zona de *preferencia débil* (Q), que estará entre la de indiferencia (I) y la de preferencia estricta (P). La preferencia débil no es una preferencia menos marcada que una preferencia estricta pero si una preferencia que no se puede establecer con suficiente seguridad.

Entonces las relaciones de superación serían:

- $aPb \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b) + p_j(g_j(a))$
- $aQb \Leftrightarrow g_j(b) + q_j(g_j(a)) < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j(g_j(a))$
- $aIb \Leftrightarrow g_j(a) \leq g_j(b) + q_j(g_j(a))$

Suponiendo a $p_j(g_j(a))$, $q_j(g_j(a))$, y $v_j(g_j(a))$ como los respectivos umbrales de preferencia, indiferencia y veto para un criterio j dado, con $q_j \leq p_j \leq v_j$.

La matriz de superación se construye a partir de la matriz de concordancia, de la matriz de discordancia y de un nivel de concordancia s (nivel de mayoría requerida) fijado por el decisor. Este nivel de concordancia debe satisfacer la siguiente desigualdad $\frac{1}{2} \leq s \leq 1 - \frac{\min_j w_j}{\sum_{j=1}^n w_j}$ donde w_j corresponde al peso del criterio g_j con $j = 1, \dots, m$.

Este método tiene en cuenta la posibilidad de trabajar con criterios cuyos umbrales de indiferencia o preferencia sean nulos, y permite un refuerzo del efecto de veto cuando la importancia del índice de concordancia decrece. Tanto la condición de concordancia como la de no veto cambian:

- Concordancia

Sea $J^S = \{j \in J: g_j(a) + q_j(g_j(a)) \geq g_j(b)\}$ donde aSb y
 $J^Q = \{j \in J: g_j(a) + q_j(g_j(a)) < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j(g_j(b))\}$ donde
 bQa , entonces el índice de concordancia será:

$$c(aSb) = \sum_{j \in J^S} w_j + \sum_{j \in J^Q} \varphi_j w_j \geq s$$

donde

$$\varphi_j = \frac{g_j(a) + p_j(g_j(a)) - g_j(b)}{p_j(g_j(a)) - q_j(g_j(a))}$$

el coeficiente φ_j decrece linealmente de 1 a 0, cuando g_j se encuentra en el rango $[g_j(a) + q_j(g_j(a)), g_j(a) + p_j(g_j(a))]$.

- No veto

$$g_j(a) + v_j(g_j(a)) \geq g_j(b) + q_j(g_j(b)) \eta_j$$

donde

$$\eta_j = \frac{1 - c(aSb) - w_j}{1 - s - w_j}.$$

En la fase de explotación ya no se consideran como indiferentes a las alternativas que pertenecen a un ciclo en el grafo. Ahora se tiene en cuenta el grado de robustez del concepto "*a supera a b*". Esto es un refuerzo del efecto de veto y permite construir clases de alternativas con la misma valoración y así definir un grafo acíclico sobre estas clases, lo cual asegura que siempre se tendrá un único núcleo.

⇒ **De ordenación.**

En este tipo se analiza la manera de ordenar todas las alternativas pertenecientes a un conjunto de éstas desde la mejor hasta la peor.

ELECTRE II

Este método fue el primero diseñado especialmente para tratar con el problema de ordenación y también el primero en utilizar una técnica basada en la construcción de una secuencia (de la mejor a la peor) de relaciones de superación superpuestas, teniendo en cuenta el valor relativo de cada alternativa en relación al resto de las demás.

Su procedimiento es muy parecido al método ELECTRE IV, en el sentido de que también se basa en criterios verdaderos. La condición de no veto se mantiene igual pero la condición de concordancia se modifica para tener en cuenta la noción superpuesta de las relaciones de superación.

Se dan dos relaciones de superación superpuestas: una *fuerte* relación de superación seguida de una *débil* relación de superación. Ambas se construyen gracias a la definición de dos niveles de concordancia, $s^1 > s^2$, donde $s^1, s^2 \in [0.5, 1 - \min_{j \in J} w_j]$. Entonces ahora la condición de concordancia con la afirmación aSb , se define como:

$$c(aSb) \geq s^r \text{ y } c(aSb) \geq c(bSa), \text{ para } r = 1, 2$$

La existencia de estas dos relaciones de superación da lugar a dos grafos de decisión, uno de relaciones fuertes (G_f) y otro de relaciones débiles (G_d). Para establecer una ordenación total de las alternativas, este método construye dos preórdenes completos a partir de (G_f), uno directo (Z_1) y uno inverso (Z_2). G_d se utilizará si es posible para desempatar alternativas con igual valor.

Finalmente se construye un preorden parcial final Z , basado en la intersección de los dos preórdenes anteriores, $Z = Z_1 \cap Z_2$, y se define como:

$$aZb \Leftrightarrow aZ_1b \text{ y } aZ_2b.$$

ELECTRE III

Fue desarrollado para mejorar al método anterior y poder tratar así los datos inexactos, imprecisos, inciertos o indeterminados. Esto se logró y en las últimas décadas se ha aplicado a una amplia gama de situaciones de la vida real.

La novedad de este método es que a partir de él se da la introducción de *pseudo-criterios* en lugar de criterios verdaderos. Y que las relaciones de superación se pueden interpretar como relaciones *difusas*; de esta forma ya no se clasifican las alternativas mediante las relaciones de superación fuerte, débil o incomparabilidad, ya que se puede tener cualquier grado intermedio entre los extremos. La construcción de este grado requiere de la definición de un *índice de credibilidad*, el cual caracteriza la credibilidad de la afirmación aSb .

Por lo tanto las relaciones de superación difusas serán como en ELECTRE IS:

- $aPb \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b) + p_j(g_j(a))$
- $aQb \Leftrightarrow g_j(b) + q_j(g_j(a)) < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j(g_j(a))$
- $aIb \Leftrightarrow g_j(a) \leq g_j(b) + q_j(g_j(a))$

con:

$$\frac{p_j(g_j(b)) - p_j(g_j(a))}{g_j(b) - g_j(a)} \geq -1 \quad y \quad \frac{q_j(g_j(b)) - q_j(g_j(a))}{g_j(b) - g_j(a)} \geq -1$$

Sea $\rho(aSb)$ el índice de credibilidad, se define usando el índice de concordancia (como se definió en ELECTRE IS), $c(aSb)$; y el índice de discordancia $d_j(aSb)$ para cada criterio g_j puede tomar cualquier valor entre 0 y 1.

El índice de discordancia alcanza su valor máximo cuando el criterio g_j pone su veto en la relación de superación, y su mínimo cuando el criterio g_j no es discordante con dicha relación. Así el índice sería:

$$d_j(aSb) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(b) > g_j(a) + v_j(g_j(a)) \\ 0 & \text{si } g_j(b) \leq g_j(a) + p_j(g_j(a)) \\ \frac{g_j(b) - g_j(a) - p_j(g_j(a))}{v_j(g_j(a)) - p_j(g_j(a))} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Con lo cual el índice de credibilidad para cada par de alternativas $(a, b) \in A$, sería el debilitamiento del índice de concordancia por los índices de discordancia de los criterios concernientes:

$$\rho(aSb) = c(aSb) * \prod_{\{j \in J: d_j(aSb) > c(aSb)\}} \frac{1 - d_j(aSb)}{1 - c(aSb)}$$

Nótese que cuando $d_j(aSb) = 1$ entonces $\rho(aSb) = 0$ ya que $c(aSb) < 1$. Y que cuando $c(aSb) = 1 \Rightarrow \{\rho(aSb) = 1 \text{ y que } d_j(aSb) = 0 \forall j \in J\}$.

Entonces tenemos que el índice de credibilidad se basa en las siguientes ideas:

- Cuando no existe un criterio discordante, entonces la credibilidad de la relación de superación es igual al índice de concordancia.
- Cuando un criterio discordante activa su umbral de veto, la afirmación no es creíble, por lo que el índice es nulo.
- Para los demás casos donde el índice de concordancia es estrictamente inferior que el índice de discordancia sobre un criterio discordante, el índice

de credibilidad llegará a ser inferior al de concordancia, debido al efecto de oposición sobre el criterio.

Respecto a la fase de explotación, se realiza de manera parecida al método anterior, es decir, mediante dos preórdenes antagonistas. Pero en este caso la ordenación se basa en el nivel de significación del índice de credibilidad, el cual define el valor a partir del cual la diferencia entre dos índices de credibilidad resultará significativa; la ordenación entonces se lleva a cabo a través de un procedimiento de *destilación* ascendente y otro descendente.

ELECTRE IV

Sigue manteniendo el concepto de *pseudo-criterio* como ELECTRE IS y ELECTRE III. Es el único método que no necesita de *pesos*, ya que funciona por una secuencia de relaciones de superación anidadas que va construyendo en forma paramétrica. Esto quiere decir que la comparación entre cada par de alternativas se realiza con base en ejemplos determinados, registrándose así el número de veces que éstos aparecen en el conjunto de criterios. Son reglas simples que permiten establecer las relaciones de superación entre las alternativas de manera que ningún criterio será demasiado “bueno” o demasiado “malo” frente a otro.

Existirán cinco diferentes relaciones S^1, \dots, S^5 . La relación S^{r+1} con $r = 1, 2, 3, 4$ aceptará un nivel de superación en circunstancias menos creíbles que la relación S^r . Esto significa (estando en una base ordinal) la asignación de un valor ρ_r del índice de credibilidad $\rho(aSb)$ para la afirmación aSb ; los valores elegidos deben ser tales que $\rho_r > \rho_{r+1}$. Además el cambio de un valor de credibilidad ρ_r a ρ_{r+1} debe tomarse como una pérdida considerable.

El proceso de explotación es igual que en ELECTRE III.

⇒ **De clasificación.**

Dentro de este tipo se necesitan definir categorías *a priori*. Para definir una categoría se deben considerar de la misma manera a todas las alternativas que puedan pertenecer a ella, cada alternativa se considera independiente de las otras, es decir, la asignación de una alternativa a cierta categoría no influye en la categoría que se le asigne a otra alternativa.

ELECTRE TRI

Es una evolución de ELECTRE III, con la diferencia de que no trata de hacer una ordenación completa sino de clasificar las alternativas en categorías predeterminadas.

Las categorías se ordenan de la peor (C_1) a la mejor (C_k), se define $C = \{C_1, \dots, C_h, \dots, C_k\}$ como el conjunto de categorías, donde cada categoría debe tener un límite inferior y uno superior. Para asignar una categoría C_h a una alternativa a dada, se debe comparar a dicha alternativa con los límites que definen a las categorías; siendo así b_h el límite superior de C_h y el límite inferior de C_{h+1} , para todo $h = 1, \dots, k$. Entonces para un límite b_h dado, la comparación se basa en la credibilidad de las afirmaciones aSb_h y b_hSa ; el índice de credibilidad en este método se define igual que como se definió en ELECTRE III.

Retomando las relaciones binarias antes mencionadas, y considerando a \succ como la preferencia, I como la indiferencia y R como la incomparabilidad, en este método tendremos:

- a) aIb_h si aSb_h y b_hSa
- b) $a \succ b_h$ si aSb_h y no b_hSa
- c) $b_h \succ a$ si no aSb_h y si b_hSa
- d) aRb_h si no aSb_h y no b_hSa

Las cuales servirán para llevar a cabo la asignación de categorías tomando en cuenta los siguientes procedimientos:

1. *Lógica conjuntiva*, en la cual una alternativa puede ser asignada a una categoría cuando su evaluación sobre una mayoría suficiente de criterios y en ausencia de veto, es al menos tan buena como el límite inferior que se ha definido sobre los criterios de dicha categoría.
2. *Lógica disyuntiva*, en que una alternativa se asigna a una categoría si tiene sobre una minoría suficiente de criterios y en ausencia de veto, una evaluación al menos tan buena como el límite inferior que se ha definido sobre los criterios de dicha categoría.

Se da más la asignación de categorías mediante la lógica disyuntiva, por lo que la lógica conjuntiva es usualmente interpretada como *pesimista* mientras que la disyuntiva como *optimista*. Así los dos procedimientos quedarían como sigue:

1. *Regla pesimista*, una alternativa a será asignada a la categoría más alta C_h tal que aSb_{h-1} .
 - a. Comparar a sucesivamente con b_r , $r = k - 1, k - 2, \dots, 0$.

- b. El límite b_h es el primero encontrado tal que aSb_h . Asignar a a la categoría C_{h+1} .
- 2. *Regla optimista*, una alternativa a será asignada a la categoría más baja C_h tal que $b_h \succ a$.
 - a. Comparar a sucesivamente con b_r , $r = 1, 2, \dots, k - 1$.
 - b. El límite b_h es el primero encontrado tal que $b_h \succ a$. Asignar a a la categoría C_h .

Para llevar a cabo la implementación de los métodos ELECTRE en los problemas de decisión del mundo real, se requieren paquetes de software. Algunos de ellos como ELECTRE IS, ELECTRE III-IV, ELECTRE TRI, IRIS y SRF son utilizados en grandes empresas y universidades.

CAPÍTULO V. APLICACIÓN DEL MÉTODO MULTICRITERIO ELECTRE IS AL PROBLEMA DEL REASEGURO ÓPTIMO

Cuando las compañías de seguros requieren optar por un reaseguro es porque su siniestralidad presenta eventos extremos, es decir, siniestros con una probabilidad de ocurrencia baja pero que cuando se dan representan grandes pérdidas para ella.

El presente apartado considera será el estudio para una cedente tipo, tomando como base una siniestralidad automovilística histórica de tres años (de valores extremos) de una aseguradora española cuyo su nombre se omite por consideraciones legales de protección de datos.

Mediante el programa *EasyFit* se observó que los datos se ajustan a una distribución Pareto Generalizada. Se ha utilizado dicho programa (en su versión de prueba) de *ajuste de distribuciones* ya que es el más accesible y flexible para el público en general, el usuario sólo debe insertar los datos de su muestra en una hoja parecida a las del programa Excel y presionar el botón de “Ajustar distribuciones”, así se puede llegar a reducir entre un 70-95% el tiempo de análisis que si se lleva a cabo un ajuste a través de un método manual. Además, es de los pocos que ofrecen un amplio campo de distribuciones (más de 55), una variedad de gráficas que permiten llevar a cabo un mejor análisis y su precio, para el ámbito académico es accesible.

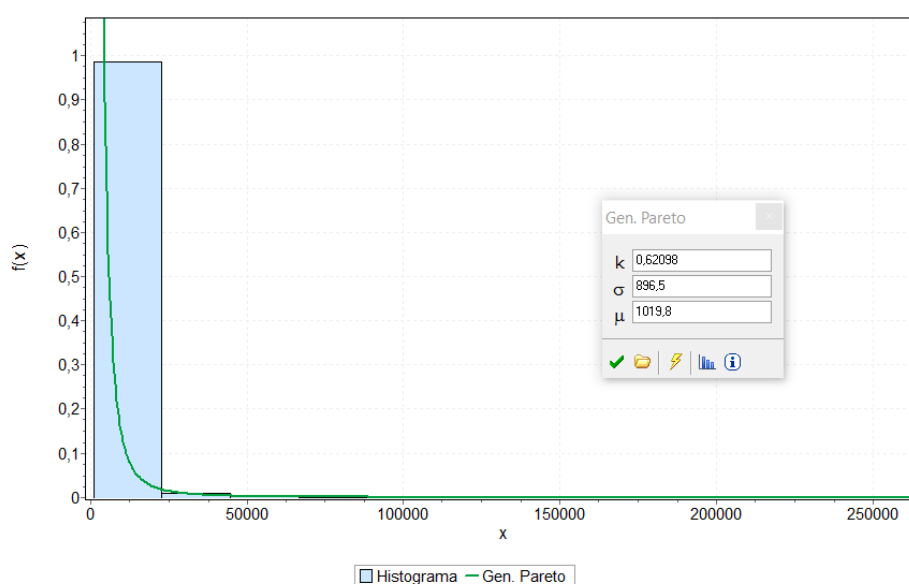


Figura V.1 Función de densidad de la Siniestralidad

Fuente: EasyFit

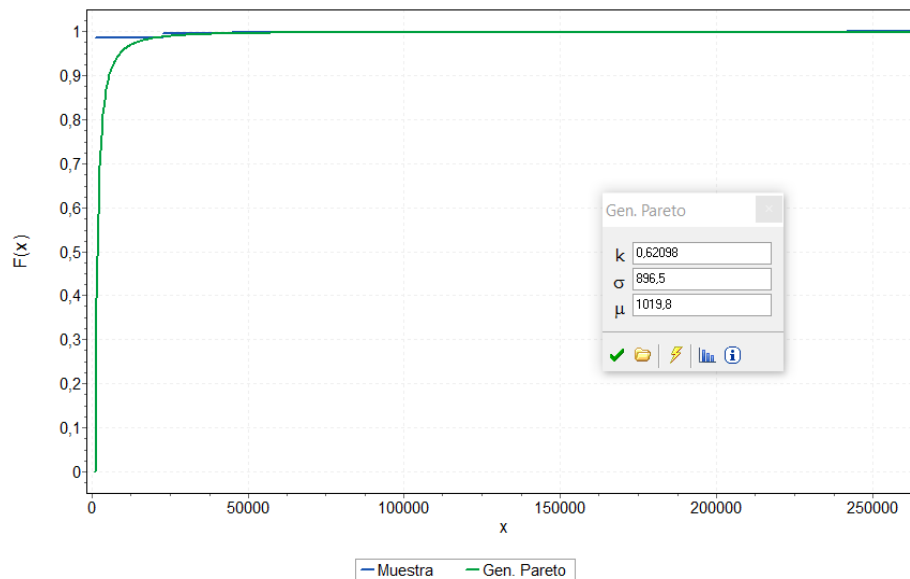


Figura V.2 Función de distribución de la Siniestralidad

Fuente: EasyFit

Para obtener el valor de las primas “brutas”, es decir sin reaseguro, se tomó en cuenta prima pura más los recargos del mercado por gastos ($\alpha = 15\%$) y por gestión ($\beta = 12\%$).

$$P'' = P + \alpha P'' + \beta P''$$

$$\Rightarrow P'' = \frac{P}{1 - \alpha - \beta} = \frac{P}{0.73}$$

Con estos datos se obtiene la ganancia “bruta” esperada, que también se ajusta a una distribución Pareto Generalizada.

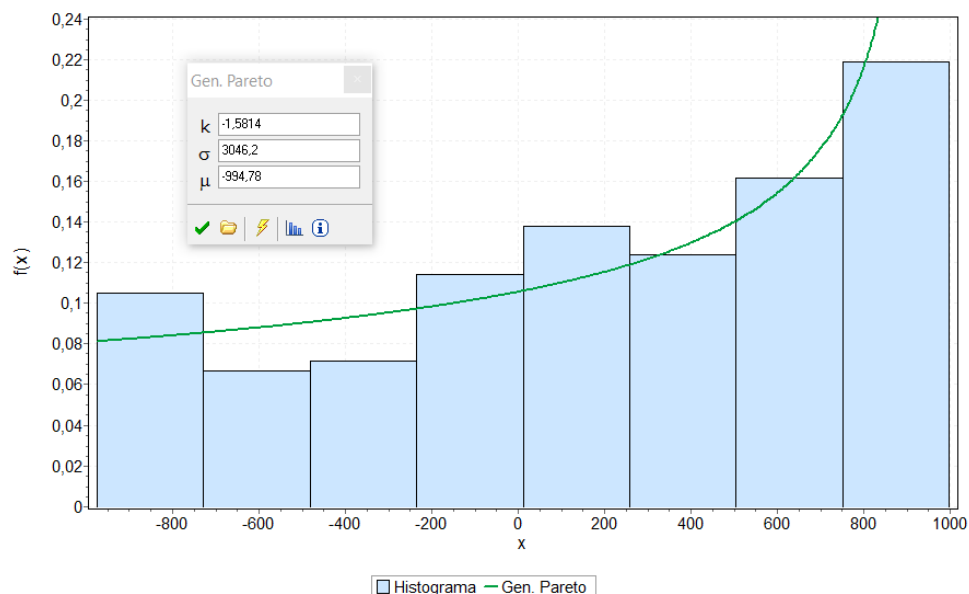


Figura V.3 Función de densidad de la Ganancia

Fuente: EasyFit

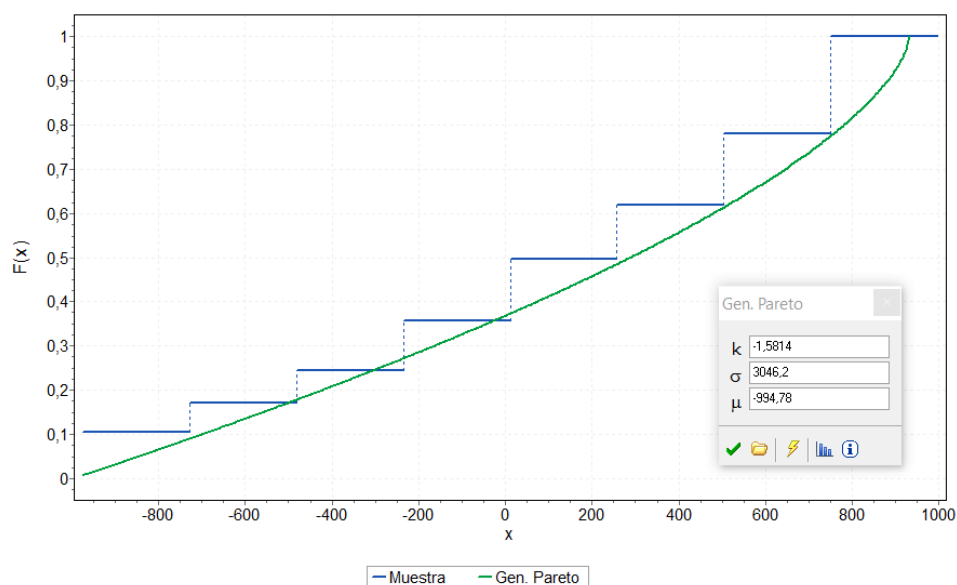


Figura V.4 Función de distribución de la Ganancia

Fuente: EasyFit

El perfil bruto de nuestra compañía tipo quedaría como sigue:

Concepto	Millones
Primas Brutas	10.05
Pérdidas Totales	7.34
Ratio de Pérdidas Esperado	73%
Ganancia	2.71

Cuadro V.1 Perfil bruto de la compañía tipo

A partir de lo anterior se calcularon diferentes opciones de reaseguro que una cedente tipo podría llegar a considerar viables (los datos de las cuatro opciones que se estudian se ajustaron a una distribución Pareto Generalizada):

1. Exceso de pérdida (XL) ilimitado (a partir de 10,000)
2. Exceso de pérdida (XL) limitado (15,000 xs 10,000)
3. Cuota-Parte (30% cedido)
4. Stop Loss (reasegurando el 70%)

Es bien sabido de la literatura que los reaseguros no proporcionales son más eficientes que los proporcionales, sin embargo existen diversas razones por las cuales se siguen manteniendo los reaseguros proporcionales en la práctica actuarial. Dentro de las opciones estudiadas en este trabajo, los contratos cuota-parte presentan las ventajas innatas a este tipo de siniestros, reforzando así los activos de la aseguradora y mejorando su margen de solvencia al protegerla de los riesgos de cambio y de fluctuaciones; pero la marcada presión sobre los precios de los seguros, la fuerte competencia entre compañías aseguradoras y la poca ocurrencia de siniestros punta, lleva a que las cedentes recurran a los contratos XL (limitados) ya que encuentren en este tipo de reaseguro la protección que necesitan para grandes siniestros. La primera opción se considera de manera teórica, ya que es un contrato de reaseguro que no

existe actualmente en el mercado global, al parecer sólo en Francia se comercializa, y el contrato stop loss debido a que su tarificación es difícil, no se vende mucho en el mercado.

El siguiente cuadro muestra un ejemplo de algunos criterios que una aseguradora podría considerar en el momento de tomar una decisión (cualquier criterio dependerá de las políticas de selección de cada compañía aseguradora), y su comportamiento bajo cada una de las diferentes opciones de reaseguro.

Cuadro V.2 Ejemplo de criterios

	PRIMA	PERDIDAS ESPERADAS	RATIO DE PÉRDIDAS ESPERADO	GANANCIAS ESPERADAS	RETORNO DE CAPITAL ESPERADO	REDUCCIÓN DE GANANCIA ESPERADA	INCREMENTO DEL RETORNO DE CAPITAL ESPERADO	Var-Mean	CVaR-Mean	VARIANZA respecto a la ganancia esperada	DESVIACIÓN absoluta respecto a la mediana
Bruto (sin reaseguro)	10,048,611	7,335,486	73%	2,713,125	29%						
1. Exceso de pérdida ilimitado (superior a 10,000)	7,594,671	5,800,573	76%	1,794,098	34%	919,027	14%	5,762	8,158	5,001,571	1,563
2. Exceso de pérdida limitado (15,000 xs 10,000)	7,654,599	5,505,358	72%	2,149,241	39%	563,884	34%	5,664	8,111	4,833,779	1,409
3. Cuota parte (30% cedido)	7,034,028	5,134,840	73%	1,899,188	19%	813,938	-36%	15,340	31,248	35,448,237	1,844
4. Stop loss (reasegurando el 70%)	8,330,853	6,261,047	75%	2,069,806	27%	643,319	-6%	9,375	13,601	13,240,926	1,873

Como se puede observar el cuadro anterior sólo toma algunos indicadores de rentabilidad y de riesgo, calculados a partir de la información con la que se contó para esta investigación; ya que las compañías de seguros proporcionan sus Cuentas Contables y sus bases de siniestralidad, primas, ganancias, etc., solamente a los consultores o brokers contratados por ellas mismas y a las autoridades autorizadas a requerirlas. No se quiso utilizar información ficticia ya que eso daría indicadores distorsionados, con lo cual se verían alterados los resultados y el decisor tomaría decisiones equivocadas.

Tomando como base dicha información después se procede a llevar a cabo el *análisis multicriterio*. Se ha elegido la familia de métodos multicriterio ELECTRE, ya que son aquellos que toman en cuenta la incertidumbre y la ambigüedad sin requerir de las preferencias del decisor, tampoco requieren de mucha información ni de jerarquías o de muchas simulaciones o casos observados. En especial se ha utilizado la versión *ELECTRE IS* debido a que nuestro problema de estudio pertenece a la categoría de selección y al ser una generalización del método ELECTRE I, es la versión que cuenta con un software (del mismo nombre) para poder ser implementado y llevado a cabo nuestro análisis.

Una vez evaluadas cada opción de reaseguro, que en adelante serán nuestras alternativas, bajo cada criterio de decisión, se obtiene entonces la matriz de decisión multicriterio, la cual se forma por las alternativas de reaseguro, los criterios de rentabilidad y riesgo, los resultados de cada criterio en cada alternativa y los pesos de los criterios:

Cuadro V.3 Matriz de decisión multicriterio

Alternativas \ Criterios	RETORNO DE CAPITAL ESPERADO	REDUCCIÓN DE GANANCIA ESPERADA	INCREMENTO DEL RETORNO DE CAPITAL ESPERADO	VaR-Mean	CVaR-Mean	VARIANZA respecto a la ganancia esperada	DESVIACIÓN absoluta respecto a la mediana
1. Exceso de pérdida ilimitado (superior a 10,000)	34%	919,027	14%	5,762	8,158	5,001,571	1,563
2. Exceso de pérdida limitado (15,000 xs 10,000)	39%	563,884	34%	5,664	8,111	4,833,779	1,409
3. Cuota parte (30% cedido)	19%	813,938	-36%	15,340	31,248	35,448,237	1,844
4. Stop loss (reasegurando el 70%)	27%	643,319	-6%	9,375	13,601	13,240,926	1,873
Pesos (w_j):	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7

A partir de dicha matriz se analizaron tres casos, modificando los pesos en cada uno pero manteniendo el mismo nivel de concordancia $s = 0.70$. En cada caso se muestran la matriz de concordancia, la matriz de discordancia, la matriz de robustez, la matriz de superación, el grafo de superación, el grafo de superación modificado y el grafo final; todos estos resultados se obtuvieron con el software *ELECTRE IS*.

Recapitulando lo visto en el apartado anterior la metodología ELECTRE IS consiste en comparar las alternativas por pares y comprende dos aspectos: concordancia y discordancia, el primero se refiere a que una mayoría de criterios mantiene la relación de superación, y el segundo donde la minoría que resta puede oponerse a que dicha relación sea válida.

La matriz de superación (matrix of outranking) se obtiene a partir de la matriz de concordancia (matrix of concordance), de la de discordancia (matrix of discordance) y del nivel de superación s . El software ELECTRE IS para obtener la matriz de concordancia, calcula un índice de concordancia por criterio para cada par de alternativas, $0 < c(aSb) < 1$, el cual expresa en qué medida (tomando en cuenta los umbrales) los resultados de las alternativas a y b sobre los criterios están en concordancia con la relación de superación aSb .

Para obtener la matriz de discordancia, similarmente se calcula un índice de discordancia $d(aSb)$, el cual puede tomar el valor de 0 ó 1 y señala si los resultados de las alternativas sobre el criterio se oponen a la afirmación aSb . El símbolo $*$ en esta matriz significa que la prueba de no discordancia no se ha llevado a cabo ya que la prueba de concordancia no se verificó.

Por lo anterior, para cada par de alternativas se aceptará la relación aSb si se satisfacen dos pruebas:

- Concordancia. Una mayoría suficiente (nivel s) de los criterios debe estar a favor de ella.
- No discordancia. Cuando la condición de concordancia se cumple, ninguno de los criterios que quedan en la minoría, se opone fuertemente a la relación de superación.

El grafo de superación (graph of outranking) representa con sus vértices (V) al conjunto de todas la alternativas y sus arcos (U) a las relaciones de superación. Para

cada alternativa $a \in A$ se le asocia un vértice $i \in V$ y para cada par de alternativas $(a, b) \in A$ el arco (i, l) existe ya sea si aPb o si aIb . Una alternativa a superará a una b si y sólo si el arco (i, l) existe. Si no existe un arco entre los vértices i y l , esto significará que a y b son *incomparables*; si existen dos arcos entre dos alternativas (en direcciones opuestas), hay una *indiferencia* entre a y b .

A partir de dicho grafo, la fase de explotación consiste en agrupar las alternativas en un subconjunto tan pequeño como sea posible (grafo de superación modificado, modified graph of outranking), para llevar a cabo las modificaciones, se introduce un índice de robustez $\langle(a, b)$, que se obtiene de la matriz de robustez (matrix of robustness) permite ver si es justificado o no modificar la conclusión de superación del par (a, b) . Las modificaciones serán:

- Agregar el arco (a, b) si no existe.
- Eliminar el arco (a, b) si ya existe.

Para realizar dichas modificaciones el software toma en cuenta que $0 \leq \langle(a, b) \leq 1$ y procede como sigue:

- Si $\langle(a, b) < \frac{1}{2}$ entonces es más justificado eliminar el arco (a, b) si existe que agregarlo si no existe.
- Si $\langle(a, b) = \frac{1}{2}$ entonces se justifica tanto la conservación como la eliminación del arco (a, b) .
- Si $\langle(a, b) > \frac{1}{2}$ entonces es más justificado agregar el arco (a, b) si no existe que eliminarlo si ya existe.

Así el subconjunto buscado donde se pueda seleccionar la mejor alternativa estará constituido por el núcleo del grafo resultante (final graph). Este núcleo está formado por las alternativas que no se superan entre sí (no existen arcos entre sus vértices), y es necesario que el resto de las alternativas estén dominadas al menos por una alternativa del núcleo, esto es, deben salir arcos a los vértices que no forman el núcleo al menos desde un vértice del núcleo.

Ahora bien veamos los resultados obtenidos.

- a) Caso 1: Se consideraron que los criterios de rentabilidad y riesgo valen lo mismo (50% y 50%).

Matrix of Concordance				
1.00	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1.00	0.00	0.83	0.83
excloss_lim	1.00	1.00	1.00	1.00
cuotaparte	0.17	0.00	1.00	0.13
stoploss	0.17	0.00	0.87	1.00

Figura V.5 Matriz de concordancia (caso 1)

Matrix of Discordance				
0	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	0	*	0	0
excloss_lim	0	0	0	0
cuotaparte	*	*	0	*
stoploss	*	*	0	0

Figura V.6 Matriz de discordancia (caso 1)

Matrix of Robustness				
1.00	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1.00	0.00	0.83	0.83
excloss_lim	1.00	1.00	1.00	1.00
cuotaparte	0.17	0.00	1.00	0.13
stoploss	0.17	0.00	0.87	1.00

Figura V.7 Matriz de robustez (caso 1)

Matrix of Outranking				
1	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1	0	1	1
excloss_lim	1	1	1	1
cuotaparte	0	0	1	0
stoploss	0	0	1	1

Figura V.8 Matriz de superación (caso 1)

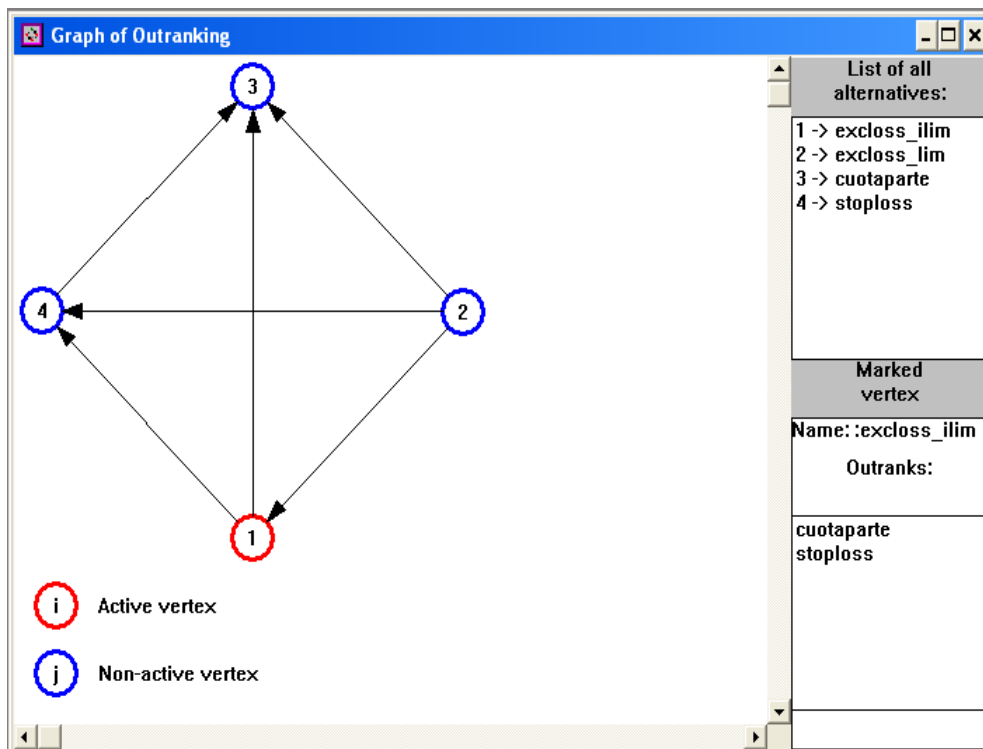


Figura V.9 Grafo de superación (caso 1)

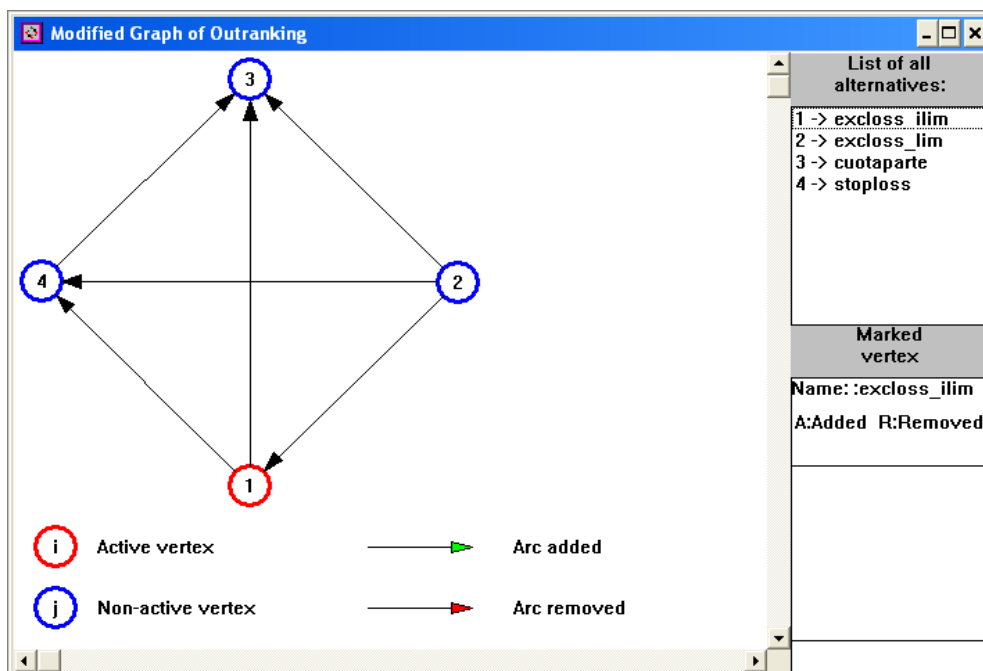


Figura V.10 Grafo de superación modificado (caso 1)

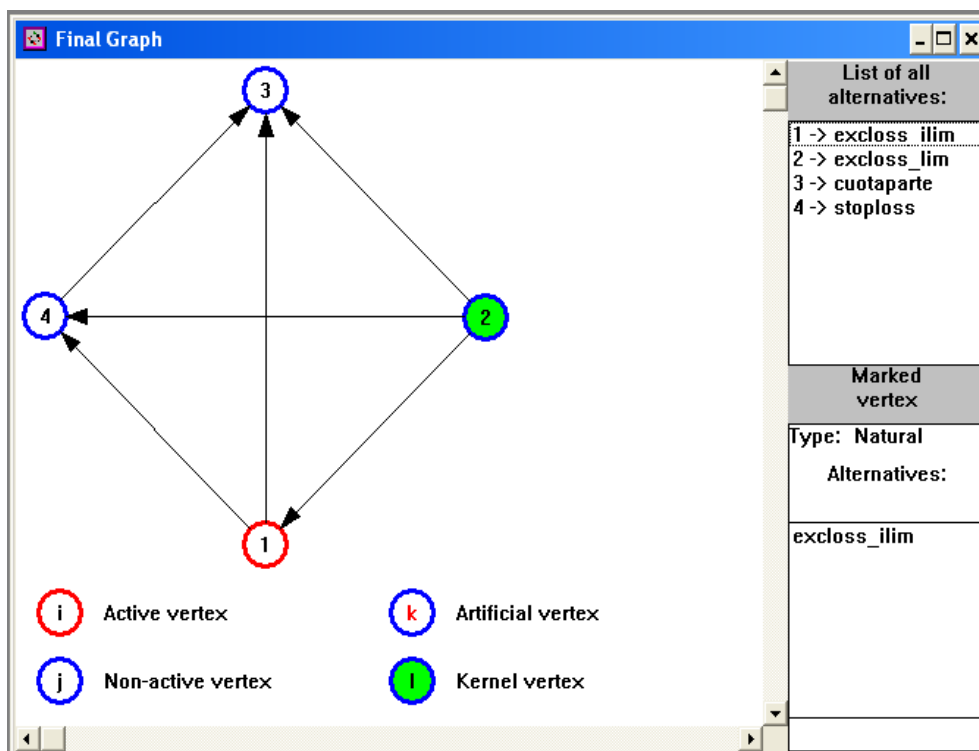


Figura V.11 Grafo resultante (caso 1)

En este caso se puede observar que no aparecen arcos añadidos o eliminados, ni vértices artificiales que representen reagrupamientos de alternativas. Teniendo un sólo núcleo que sería la opción a tomar, en este supuesto se trata del reaseguro *Exceso de pérdida (XL) limitado*.

- b) Caso 2: Se consideraron que los criterios de rentabilidad tienen mayor importancia (60%) que los de riesgo (40%).

Matrix of Concordance				
1.00	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1.00	0.00	0.80	0.80
excloss_lim	1.00	1.00	1.00	1.00
cuotaparte	0.20	0.00	1.00	0.10
stoploss	0.20	0.00	0.90	1.00

Figura V.12 Matriz de concordancia (caso 2)

Matrix of Discordance				
0	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	0	*	0	0
excloss_lim	0	0	0	0
cuotaparte	*	*	0	*
stoploss	*	*	0	0

Figura V.13 Matriz de discordancia (caso 2)

Matrix of Robustness				
1.00	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1.00	0.00	0.80	0.80
excloss_lim	1.00	1.00	1.00	1.00
cuotaparte	0.20	0.00	1.00	0.10
stoploss	0.20	0.00	0.90	1.00

Figura V.14 Matriz de robustez (caso 2)

Matrix of Outranking				
1	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1	0	1	1
excloss_lim	1	1	1	1
cuotaparte	0	0	1	0
stoploss	0	0	1	1

Figura V.15 Matriz de superación (caso 2)

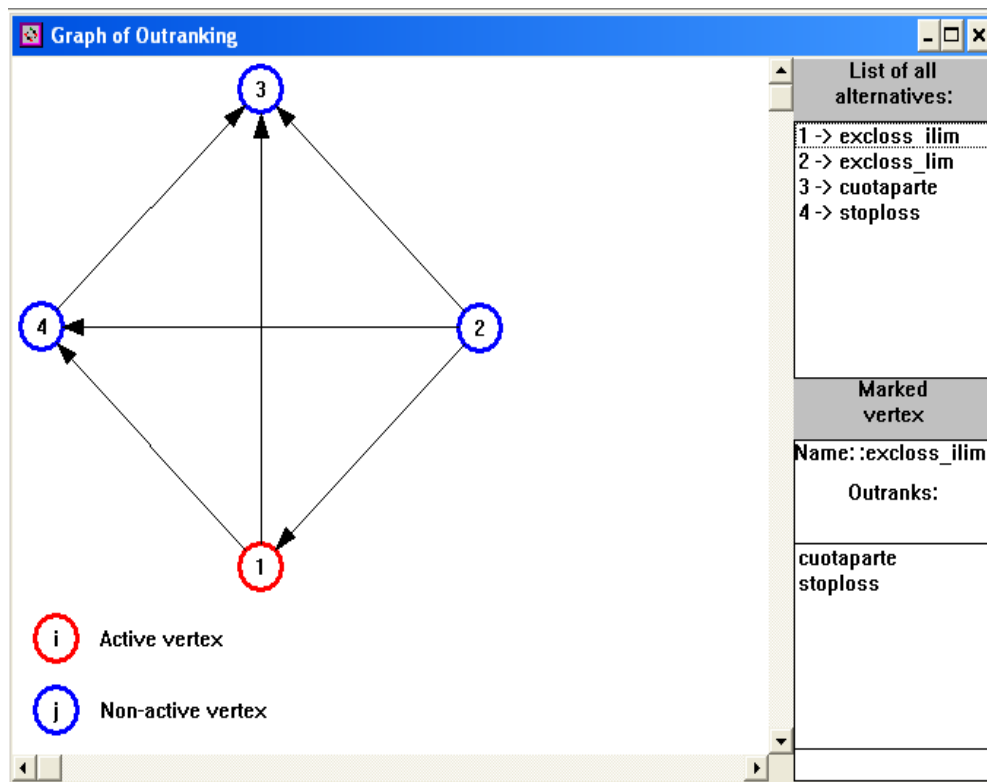


Figura V.16 Grafo de superación (caso 2)

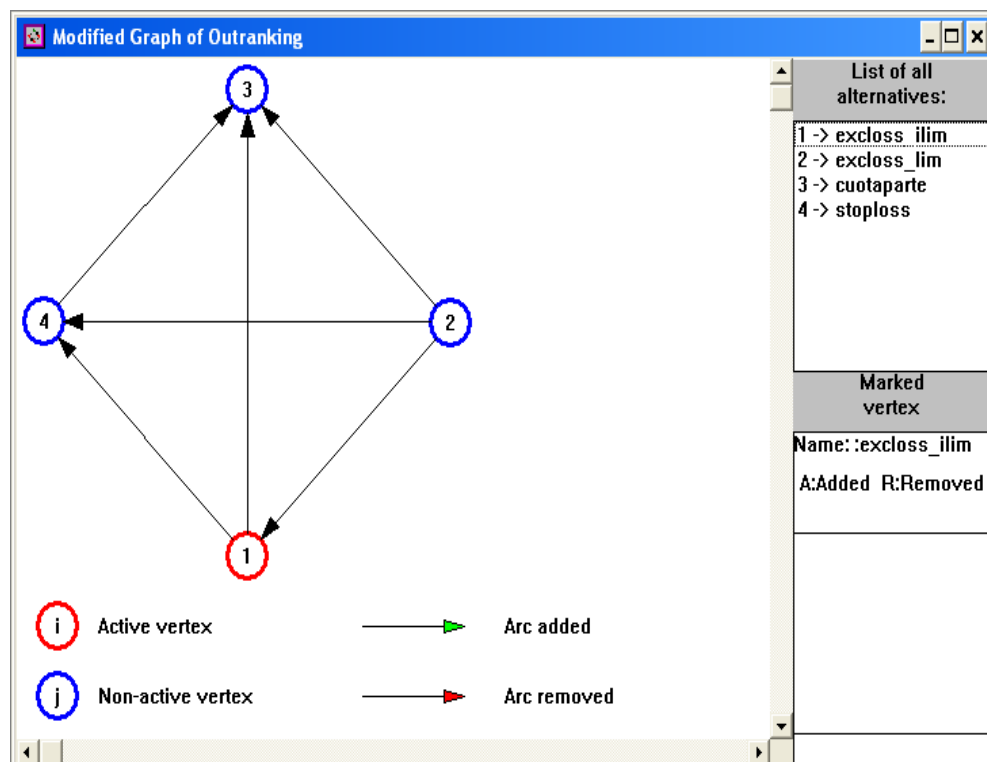


Figura V.17 Grafo de superación modificado (caso 2)

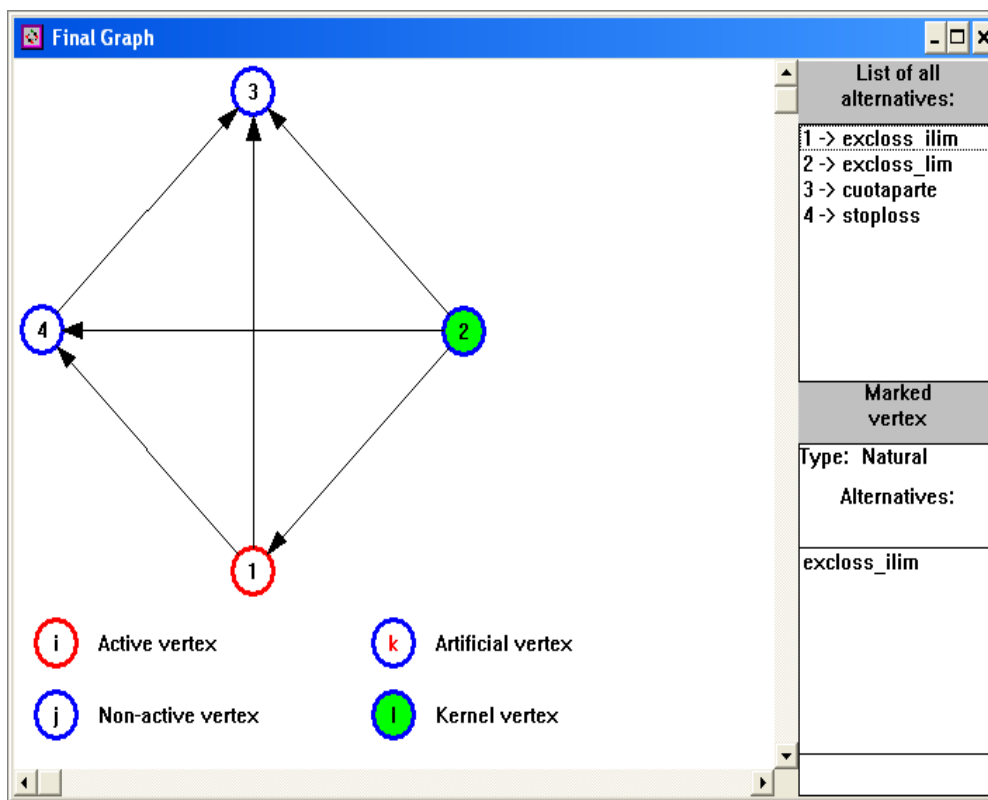


Figura V.18 Grafo resultante (caso 2)

De nuevo se observa que no aparecen arcos añadidos o eliminados, ni vértices artificiales que representen reagrupamientos de alternativas. Se obtiene el mismo resultado que en el primer caso, es decir, que la opción a tomar sería el reaseguro *Exceso de pérdida (XL) limitado*.

- c) Caso 3: Se consideraron que los criterios de riesgo tienen mayor importancia (60%) que los de rentabilidad (40%).

Matrix of Concordance				
1.00	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1.00	0.00	0.87	0.87
excloss_lim	1.00	1.00	1.00	1.00
cuotaparte	0.13	0.00	1.00	0.15
stoploss	0.13	0.00	0.85	1.00

Figura V.19 Matriz de concordancia (caso 3)

Matrix of Discordance				
0	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	0	*	0	0
excloss_lim	0	0	0	0
cuotaparte	*	*	0	*
stoploss	*	*	0	0

Figura V.20 Matriz de discordancia (caso 3)

Matrix of Robustness				
1.00	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1.00	0.00	0.87	0.87
excloss_lim	1.00	1.00	1.00	1.00
cuotaparte	0.13	0.00	1.00	0.15
stoploss	0.13	0.00	0.85	1.00

Figura V.21 Matriz de robustez (caso 3)

Matrix of Outranking				
1	excloss_ilm	excloss_lim	cuotaparte	stoploss
excloss_ilm	1	0	1	1
excloss_lim	1	1	1	1
cuotaparte	0	0	1	0
stoploss	0	0	1	1

Figura V.22 Matriz de superación (caso 3)

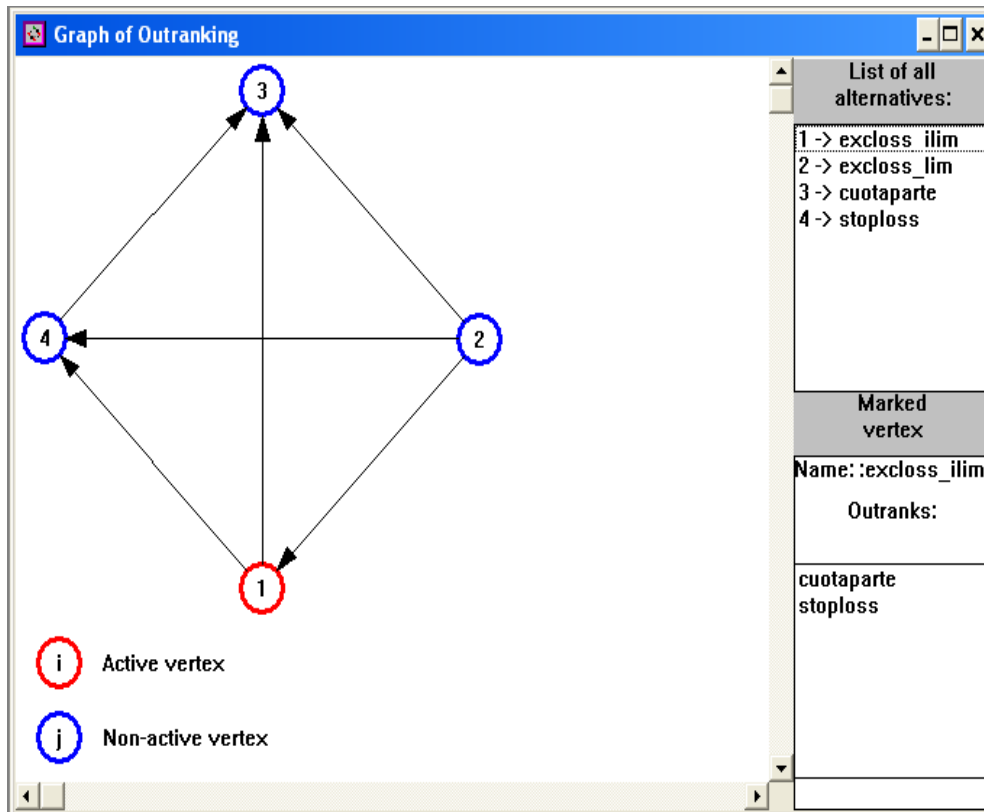


Figura V.23 Grafo de superación (caso 3)

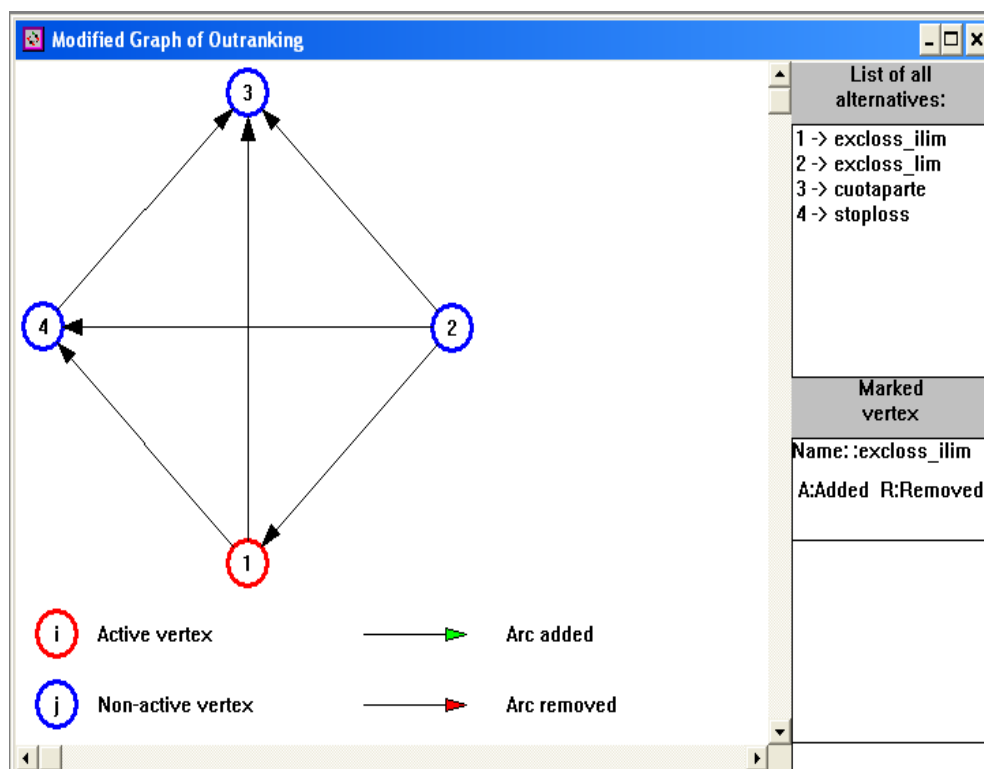


Figura V.24 Grafo de superación modificado (caso 3)

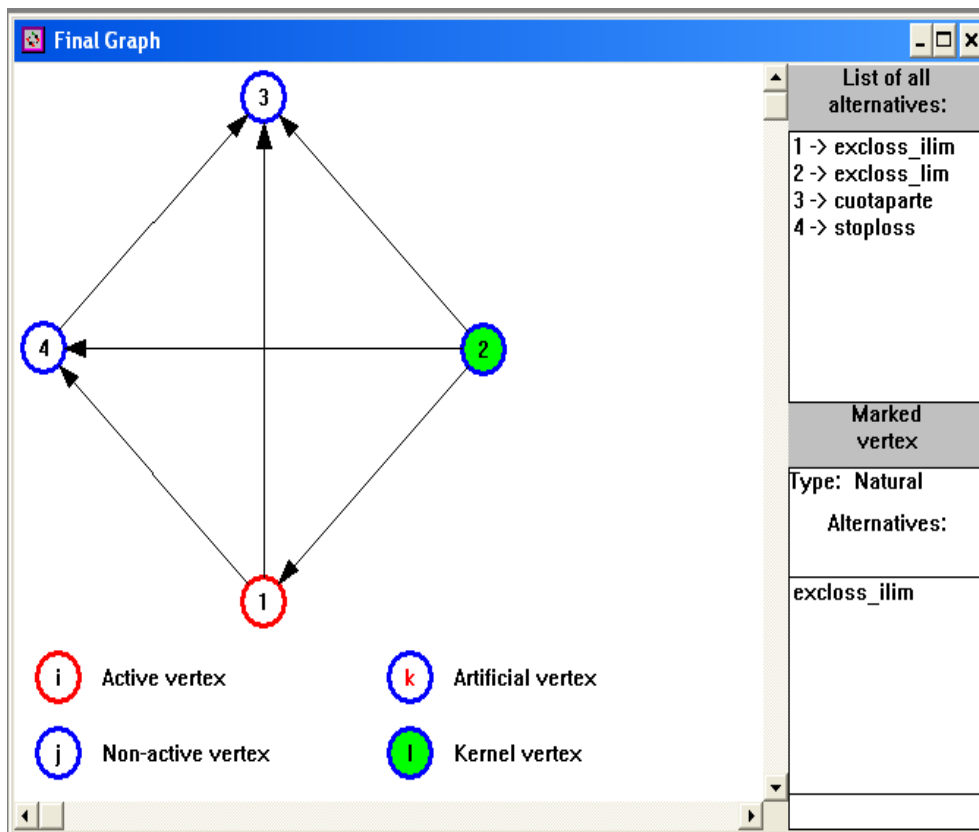


Figura V.25 Grafo resultante (caso 3)

Una vez más no aparecen arcos añadidos o eliminados, ni vértices artificiales que representen reagrupamientos de alternativas. Con lo cual para nuestra compañía de seguros tipo, de acuerdo a la información con la que se contó para el análisis su opción óptima de reaseguro sería tomar uno del tipo *Exceso de pérdida (XL) limitado*.

Como se observa en los tres casos anteriores la mejor opción para la cedente sigue siendo la misma, pero los resultados podrían ser diferentes, ya que como se ha visto el reaseguro resulta ser “un traje a la medida” de la compañía de seguros. El análisis en sí se podría ampliar a más criterios de estudio en el momento en que se tenga la información necesaria por parte de la aseguradora. Es decir, cuanto mayor sea la calidad de información que tenga el decisor, el análisis será más robusto e influirá en la calidad de las decisiones que se tomen.

El software ELECTRE IS resulta un procedimiento sencillo de aplicar, así también el decisor puede tener cierto control sobre los resultados asignando los pesos a cada uno de los criterios de acuerdo a sus preferencias o políticas de la compañía aseguradora, pudiendo utilizar como ayuda alguno de los métodos de asignación de pesos, por ejemplo el SRF.

CONCLUSIONES

Aunque el sector asegurador no ha sufrido los estragos de la crisis económica directamente como otros sectores, si que se ve afectado por la capacidad de gasto de las economías domésticas. Es decir, depende de las demandas de los asegurados, ya que si estos tienen una crisis para poder enfrentar el día a día, no tendrán un ahorro para invertir en seguros; aún sabiendo que dicha inversión los cubre de un gasto mayor en caso de un siniestro. Debido a este tipo de dependencia, el negocio base de seguros tiene poca estabilidad que se refleja en un bajo crecimiento de su rentabilidad, lo cual afecta directamente al mercado de reaseguro, ya que las cedentes prefieren aumentar su retención.

Lo anterior sumado a que las principales reaseguradoras han bajado el coste de sus primas, llega a caracterizar al mercado asegurador-reasegurador como “blando” y a que las agencias de rating califiquen como negativa la perspectiva que se tiene del reaseguro mundial. Sin embargo el sector reasegurador a la fecha sigue manteniendo resultados satisfactorios. En la actualidad, el mercado de reaseguro tiene oportunidades de futuro, en particular si se centra en cubrir nuevas demandas como por ejemplo, los riesgos tecnológicos o los siniestros catastróficos en territorios de países emergentes.

El presente trabajo se muestra como una opción diferente de análisis para las cedentes y así poder disminuir el detrimento de los márgenes técnicos y financieros. Al contar con dichos márgenes saneados, se podrán obtener ratios de comparación más decisivos que representen el factor más importante del mercado reasegurador que es, la rentabilidad, clara base de la solvencia.

Las compañías de seguros se enfrentan a numerosos problemas de decisión importantes, en los que coexisten objetivos diferentes cuya consecución conjunta es imposible, porque la mejora de uno de ellos por lo general implica el empeoramiento de alguno de los otros. Algunos de estos problemas tienen relación con la disyuntiva clásica entre riesgo y beneficio, mientras que en otros problemas aparecen objetivos más sofisticados, como el grado de equidad de las primas de seguros.

Como se ha visto existen varias medidas del riesgo con diversas propiedades cada una, la elección de una medida en especial se debe hacer con base en el problema a resolver, y también a las preferencias subjetivas del decisor. En la práctica, la medida apropiada para cuantificar el riesgo de seguros sigue siendo un tema de debate. La complejidad en la solución de los modelos de reaseguro puede diferir sustancialmente, esto depende de los diferentes principios de cálculo de primas de reaseguro que se utilicen; la elección de un principio de prima depende en gran medida de la importancia que se concede a sus propiedades, no existe ningún principio que sea uniformemente mejor.

Es por ello que el analista debe ser un oyente activo, trabajar en equipo con el o los decisores, saber manejar la incertidumbre en la información, los diversos objetivos de la compañía, las políticas de empresa y las consecuencias a largo plazo; para poder así

ofrecer mediante el uso de modelos explícitos aunque no completamente normalizados, estrategias robustas contra múltiples escenarios como una “recomendación” en la ayuda de toma de decisiones.

En este trabajo se ha estudiado el problema de reaseguro óptimo, que consiste en la selección del tipo y/o la cantidad apropiada de reaseguro. Las preguntas que se han intentado responder son: ¿cómo reasegurar? y ¿cuánto reasegurar? Existen básicamente dos formas de responder a estas preguntas: una de ellas es determinar el punto de retención óptimo mediante técnicas de Programación Matemática; la otra, que es la que nosotros hemos analizado, se basa en la evaluación mediante el análisis multicriterio de los diferentes tipos de contrato de reaseguro existentes en el mercado actual.

En la Tesis se han estudiado con detenimiento los diferentes criterios de decisión involucrados en estos problemas y las diferentes técnicas multicriterio que pueden ser empleadas en su resolución. Se han seleccionado algunos de esos criterios, que desde diferentes perspectivas miden los objetivos que intuitivamente se relacionan con las ideas de rentabilidad y riesgo, y se ha seleccionado asimismo una técnica, el método ELECTRE IS, que parece ser adecuada para el estudio de este problema. Una de sus ventajas es que sólo se necesitaron datos numéricos, sin embargo, al ser un método numérico, no se pueden obtener expresiones matemáticas para los niveles óptimos de retención.

Se ha incluido asimismo una aplicación numérica con datos reales, que muestra claramente la utilidad de esta técnica como ayuda a la toma de decisiones relacionadas con el reaseguro. En términos de cálculos, la parte complicada para llevar a cabo este trabajo fue el no contar con toda la información técnica y financiera de alguna cedente, así como los requerimientos informáticos, ya que el programa de ajuste de distribuciones en su versión de prueba tiene una caducidad y el software del método multicriterio utilizado, en la versión disponible sólo funciona con sistemas operativos anteriores a los disponibles actualmente.

Consideramos que la metodología analizada en esta tesis puede ser empleada sin grandes dificultades por las empresas de seguros para el análisis y resolución no sólo del problema de reaseguro aquí analizado, sino asimismo de todos aquellos problemas en los que se intenta alcanzar objetivos a menudo incompatibles. Como hemos visto, la metodología es intuitivamente plausible y fácil de entender por los decisores de las compañías, siendo al mismo tiempo una herramienta matemáticamente rigurosa y muy potente para generar conclusiones de interés práctico. En la práctica actuarial, los resultados basados en cualquier análisis o modelo matemático son sólo parte de cualquier decisión, y nuestro análisis debe tomarse como tal.

BIBLIOGRAFÍA Y RECURSOS DE INTERNET

- Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS)
<http://www.amis.com.mx>
- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas
<http://www.cnsf.gob.mx>
- Diccionarios:
 - <http://definicion.de/>
 - <https://www.fundacionmapfre.org/wdiccionario/general/diccionario-mapfre-seguros.shtml>
 - <http://www.icea.es/es-es/informaciondelseguro/glosario>
 - http://www.madrid.org/cs/StaticFiles/Emprendedores/GuiaEmprendedor/tema8/F50_8.1_CONCEPTOS_BASICOS.pdf
 - <http://www.puntoseguro.com/glosario-de-terminos-sobre-seguros>
 - <http://reservastecnicascun.blogspot.com.es/>
 - http://www.segurb2b.com/informacion/dicc_seguros.cfm
 - <http://www.seguros-seguros.com>
- Gran Rico Francisco Javier, “Reaseguro”.
<http://www.expansion.com/diccionario-economico/reaseguro.html>
- LAMSADE, Université Paris Dauphine
<http://www.lamsade.dauphine.fr>
- “EasyFit”, Programa para ajuste de distribución
<http://www.mathwave.com/es/home.html>
- “Guía Virtual de Seguros”
<http://guivise.es.tl/GUIA-VIRTUAL-DE-SEGUROS.htm>
- “Métodos lineales y multicriterios”, UNAM, pp. 65-67
<http://biblio.juridicas.unam.mx/libros/2/516/10.pdf>
- “Manual Básico del Seguro”, Gustavo Alexi Osorio González, pp. 49-50
<http://www.fenixseguros.com.py/>
- Unión Española de Entidades Aseguradoras y Reaseguradoras (UNESPA)
<http://www.unespa.es/frontend/unespa/Que-Es-El-Reaseguro-vn2779-vst226>

- “El Reaseguro en España”, Informe elaborado por el Servicio de Estudios de Nacional de Reaseguros, S.A., septiembre 2015, pp. 1-15/ septiembre 2016, pp. 1-14
- “Introducción al Reaseguro”, Ed. Fundación Mapfre, pp. 1-3, 13-28
- Afshari Alireza, Mojahed Majid, Mohd Yusuf Rosnah, “Simple Additive Weighting approach to Personnel Selection problem”, International Journal of Innovation, Management and Technology, Vol. 1, No. 5, diciembre 2010, pp. 512-514
- Aguilar Pradal Alina F., “Medidas del riesgo aplicadas al reaseguro”, Trabajo fin de Máster, UCM, septiembre 2012, pp. 4-34
- Aït Younes Amine, Azibi Riad, Roy Bernard, “Manuel d'utilisation d'Electre IS”, Tomo 1, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 2010-2011, pp. 1-54 y Anexo A
- Aznar Bellver Jerónimo, “Programación por Metas (Goal Programming, GP)”, Grupo de Valoración y Decisión Multicriterio, Universidad Politécnica de Valencia, octubre 2013
- Barfod Michael Bruhn, Leleur Steen, “Multi-criteria decision analysis for use in transport decision making”, Technical University of Denmark, 2014, pp. 24-29
- Benítez Barajas Gustavo, “Introducción La Teoría de la Utilidad Multiatributo”, Universidad del Valle de México, Ciencias económico-administrativas, 2015, pp. 8-14
- Benito Rivero José Antonio, “El Reaseguro”, Ed. Mapfre, pp. 7-17, 23, 34, 48-51, 54-58, 60, 62-64, 69-70, 72-73, 143-144, 157, 300
- Blázquez González Rocío, “Análisis de tiendas online para la comercialización de los aceites de oliva”, Universidad Internacional Antonio Machado, 2011-2012, pp. 30-31
- Campuzano Cánovas Antonio, “Elección de una técnica de generación de energía mediante los métodos de superación ELECTRE y PROMETHEE, utilizando conjuntos difusos”, Universidad Politécnica de Cartagena, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial, julio 2013, pp. 125-133, 146-171
- Constantin Zopounidis, Panos M. Pardalos, “Handbook of Multicriteria Analysis, Applied Optimization”, Ed. Springer, 2010, pp. vii, viii, 4, 35, 52-53

- Díaz Gómez Fernando, “Razonamiento Basado en Casos (CBR)”, E. U. de Informática (Segovia), Universidad de Valladolid, pp. 5-28
- Duvy Rosario Botia Dávila, Varon Gallon Diana Paola, Arias Rodríguez Harold Eduardo, “Contabilidad para el sector asegurador”, febrero 2009, pp. 8, 15, 16, 18, 20, 23, 24 , 26, 27, 29, 34, 47, 48, 50, 58-60
- Fernández Barberis, Escribano Ródenas María del Carmen, “El Análisis de la Robustez y la Ayuda a la Decisión Multicriterio Discreta”, Asociación Internacional de Economía Aplicada, Anales 2003, pp. 2-6
- Fernández Barberis Gabriela, Escribano Ródenas María del Carmen, “La Ayuda a la Decisión Multicriterio: orígenes, evolución y situación actual”, Asociación de Historia de la Estadística y la Probabilidad de España, VI Congreso, 2011, pp. 3-4, 7-11
- Fernández Barberis Gabriela, Escribano Ródenas María del Carmen, “Utilización del Método ELECTRE IS de Ayuda a la Decisión Multicriterio en la valoración y selección de alternativas de inversión”, pp. 2-13
- Figueira José, Mousseau Vincent, Bernard Roy “ELECTRE METHODS”, Chapter 1, Université Paris Dauphine, DEA Méthodes Scientifiques de Gestion, LAMSADE, pp. 2-22
- Escribano Ródenas María del Carmen, Fernández Barberis Gabriela, “Estudio comparativo de métodos de ayuda a la decisión multicriterio en la valoración y selección de alternativas de inversión”, pp. 2-4
- Galindo G. José, “Curso Introductorio de Conjuntos y Sistemas Difusos (Lógica Difusa y Aplicaciones), Universidad de Málaga, Tema 1 Introducción: Conceptos Básicos, pp. 2-13
- García Cascales María del Socorro, “Métodos para la comparación de alternativas mediante un Sistema de Ayuda a la Decisión (S.A.D.) y “Soft Computing”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena, 2009, pp. 46-51
- García Cascales María del Socorro, Lamata Jiménez María Teresa, “Aplicación de la Lógica Difusa a la Toma de Decisión en Gestión del Mantenimiento Industrial”, AIEPRO, Congreso 2004, pp. 2-3

- García-Cascales M. Socorro, Lamata M. Teresa, “Nueva aproximación al método TOPSIS difuso con etiquetas lingüísticas”, XV Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, Huelva, España, febrero 2010, pp. 620-621
- García Fariñas Anai, “El análisis envolvente de datos, herramienta para la medición de la eficiencia en instituciones sanitarias, potencialidades y limitaciones”, Revista Cubana de Higiene y Epidemiología v.47 n.2 Ciudad de la Habana mayo-ago. 2009, pp. 4-5, 7-8
- García Islas Jonatan, “Las líneas estratégicas del sector hídrico en México en materia de investigación, desarrollo tecnológico y formación de recursos humanos: una jerarquización empleando el método PROMETHEE”, Tesis, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2009, pp. 34-43
- García Ocampo Denise, “Razones Financieras del Sector Asegurador”, septiembre 1993, pp. 1, 3-14
- Gutiérrez Juan Camilo, “Método TOPSIS”, septiembre 2015, pp. 4-10
- Jiménez Jarquin Valentín Inocente, “Un modelo multiatributo para la selección de personal en una empresa de servicio: caso de estudio”, Tesis, IPN, UPIICSA, México, junio 2013, pp. 40-54
- L. Olson David, “Decision Aids for Selection Problems”, Springer Series in Operation Research, 1996, pp. 34-48
- Linares Ángel, “Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras”, Instituto de Ciencias del Seguro, Fundación Mapfre, 2007, pp. 484, 486-488, 495-499, 501
- Lozano Laura, Fernández Javier, “Razonamiento Basado en Casos: Una Visión General”, Trabajo alumnos 4º Informática, Universidad de Valladolid, pp. 5, 10-11, 57-59
- Klaus Gerathewohl, “Reaseguro Teoría y Práctica”, traducción de Teodoro Díez Arias, Ed. Reaseguros Gil y Carvajal S.A., Vol. I, pp. 78-82, 111-117, 301-302, 360, 888-891. Vol. II, pp. 1-2, 6, 9
- Molina Sánchez Horacio, Ramírez Sobrino Jesús N., Bautista Mesa Rafael, De Vicente Lama Marta, “Análisis de Estados Financieros para la Toma de Decisiones”, Delta Publicaciones, 2015, pp. 15-51

- Morales Eduardo, "Razonamiento Basado en Casos (CBR)", Curso de Inteligencia Artificial, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México, agosto 2009, Tema 12
- Moreno Jiménez José María, "Decisión Multicriterio", Facultad de Económicas, Universidad de Zaragoza, 2006, pp. 10-25, 31-37
- Ormazábal Sánchez Gaizka, "El IDS: Un nuevo sistema integrado de toma de decisiones para la gestión de proyectos constructivos", Tesis, Apéndice B, 2002, pp. 8-12
- Padilla Garrido Nuria, Arévalo Quijada María Teresa, Guerrero Casas Flor María, "Aplicación del método PROMETHEE en la jerarquización de títulos de una cartera de valores", Universidad de Valencia, ASEPUMA, pp. 576-578
- Restrepo R. María Isabel, Villegas R. Juan Guillermo, "Análisis Envolvente de Datos: Introducción y herramienta pública para su utilización", Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia, pp. 5-11
- Romero Carlos, "Programación por Metas (Goal Programming): pasado, presente y futuro", Departamento de Economía y Gestión Forestal, Universidad Politécnica de Madrid, pp. 1-14
- Romero Carlos, "Análisis de las Decisiones Multicriterio", Publicaciones de Ingeniería de Sistemas, Ed. Isdefe, noviembre 1996, pp. 69-74
- Schuschny Andrés Ricardo, "El método DEA y su aplicación al estudio del sector energético y las emisiones de CO₂ en América Latina y el Caribe", División de Estadística y Proyecciones Económicas de la CEPAL, Santiago de Chile, enero 2007, pp. 17-23
- Shalabh Mathur/ Sourav Roy, "Reinsurance optimisation", Towers Watson 2010
- Simón de Blas C., Arias Coello A., Simón Martín J., "Aplicación de la técnica DEA en la medición de la eficiencia de las bibliotecas de la Universidad Complutense de Madrid", Revista Española de Documentación Científica 30, 1, enero-marzo 2007, pp. 12-13
- Stephen A. Ross/ W. Westerfield Randolph/ F. Jaffe Jeffrey, "Finanzas Corporativas", pp. 26, 37-38, 40-42

- Velasquez Mark/ T. Hester Patrick, "An Analysis of Multi-Criteria Decision Making Methods", International Journal of Operations Research Vol. 10, No. 2, 2013, pp. 57-64
- Vitoriano Begoña, "Teoría de la Decisión: Decisión con Incertidumbre, Decisión Multicriterio y Teoría de Juegos", pp. 19-20, 34-39